

扭转形变的坡印亭效应

孙尉翔

mswxsun@scut.edu.cn

2024-04-20

传统上，弹性体材料的力学测量可沿用固体材料的范式。比如，裁成标准哑铃状试样在万能拉伸机上进行单轴拉伸测试，或者按照相应的制样要求进行动态力学测试仪上进行变温测试等。由于弹性材料模量低造成的特殊情况，一般能在原有范式内解决。

水凝胶或生物软组织的模量比传统弹性体材料还要低一、两个数量级，却仍是具备永久模量的弹性固体，面临诸如无法夹持等原有固体力学测量范式内无法解决的问题。因此，大部分研究者倾向于在商用旋转流变仪上，选择双平板转子来对这类特别软的弹性体材料进行力学测量，此时试样发生的是近似于叠加了轴向压缩的扭转形变。

本文旨在强调，旋转流变仪及其测量学是为流体而设计的。商用旋转流变仪的常规制样方法、测量方法和软件默认的物理量换算公式，都是针对流体测量的理论推导结果。直接按照直觉将商用流变仪用于弹性固体的测量，将不可忽略若干新问题，这些将集中在第 2 节和第 4 节讨论。第 1 节和第 3 节罗列了必要的理论基础。

目录

1 扭转形变的连续介质力学分析	2
2 使用旋转流变仪时的问题	6
3 常见本构模型	9
4 坡印亭效应的模型预测	12

1 扭转形变的连续介质力学分析

1.1 运动学

考虑原长 L_0 ，原半径为 R_0 的圆柱物体，发生扭转形变，扭转角为 θ_0 ，如图1所示建立柱坐标系。设参考构型点 \mathbf{X} 坐标对应 (R, Θ, Z) ，当前构型点 \mathbf{x} 坐标对应 (r, θ, z) ，则扭转形变场满足

$$\begin{cases} r = \alpha^{-1/2} R \\ \theta = \Theta + \frac{\theta_0 \alpha Z}{L} \\ z = \alpha Z \end{cases}$$

其中 $\alpha \equiv L/L_0$ 是形变前后长度比，即 L 是形变后长度。上式假定了不可压缩。由于我们只讨论静力学问题，因此可以假定不可压缩。在讨论动力学问题，不可压缩假定将使弹性波传递速率为无穷大。

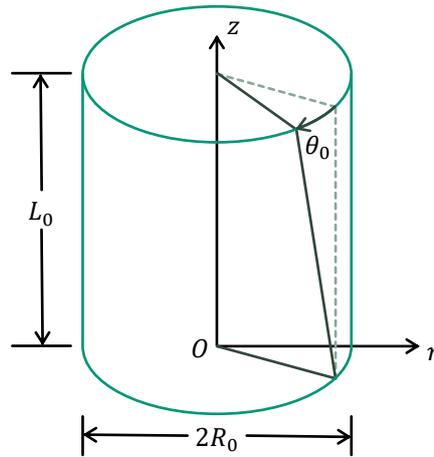


图 1: 压缩扭转形变示意图

按照上式可推得，形变梯度张量

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \alpha^{-1/2} & 0 & 0 \\ 0 & \alpha^{-1/2} & \frac{r\theta_0\alpha}{L} \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} \quad (1)$$

易验 $\det \mathbf{F} = 1$ ，与所假定的不可压缩条件一致。由 \mathbf{F} 的坐标表达式可知，扭转形变场只有径向 r 依赖性。

柯西-格林应变张量 \mathbf{B} :

$$\mathbf{B} = \mathbf{F}\mathbf{F}^T = \begin{pmatrix} \alpha^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & \alpha^{-1} + \frac{r^2\alpha^2\theta_0^2}{L^2} & \frac{r\alpha^2\theta_0}{L} \\ 0 & \frac{r\theta_0\alpha^2}{L} & \alpha^2 \end{pmatrix} \quad (2)$$

其逆:

$$\mathbf{B}^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & -\frac{r\theta_0\alpha}{L} \\ 0 & -\frac{r\theta_0\alpha}{L} & \alpha^{-2} + \frac{r^2\theta_0^2\alpha}{L^2} \end{pmatrix} \quad (3)$$

及其主不变量:

$$\begin{aligned} I_{\mathbf{B}} &= \text{tr}\mathbf{B} \\ &= 2\alpha^{-1} + \alpha^2 + \frac{r^2\alpha^2\theta_0^2}{L^2}, \\ II_{\mathbf{B}} &= \frac{1}{2}(\text{tr}^2\mathbf{B} - \text{tr}\mathbf{B}^2) \\ &= \alpha^{-2} + 2\alpha + \frac{r^2\theta_0^2\alpha}{L^2} \\ III_{\mathbf{B}} &\equiv J = \det\mathbf{B} = 1 \end{aligned} \quad (4)$$

无限小应变张量 $\boldsymbol{\varepsilon} =$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon} &= \frac{1}{2}(\mathbf{F} + \mathbf{F}^T) - \mathbf{I} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha^{-1/2} - 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha^{-1/2} - 1 & \frac{r\theta_0\alpha}{2L} \\ 0 & \frac{r\theta_0\alpha}{2L} & \alpha - 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5)$$

及其主不变量

$$\begin{aligned} I_{\boldsymbol{\varepsilon}} &= \text{tr}\boldsymbol{\varepsilon} = 2\alpha^{-1/2} + \alpha - 3 \\ II_{\boldsymbol{\varepsilon}} &= \frac{1}{2}(\text{tr}^2\boldsymbol{\varepsilon} - \text{tr}\boldsymbol{\varepsilon}^2) \\ &= 3 + \alpha^{-1} - 4\alpha^{-1/2} + 2\alpha^{1/2} - 2\alpha - \frac{r^2\alpha^2\theta_0^2}{4L^2} \\ III_{\boldsymbol{\varepsilon}} &= \det\boldsymbol{\varepsilon} \\ &= \frac{(\alpha^{1/2} - 1)^3(\alpha^{1/2} + 1)}{\alpha} + \frac{r^2\alpha^{3/2}\theta_0^2}{4L^2}(\alpha^{1/2} - 1) \end{aligned} \quad (6)$$

注意, 无限小应变张量仅在 $\mathbf{F} - \mathbf{I} \rightarrow \mathbf{0}$ 时满足刚体运动下的协变性。

1.2 静力学

设柯西应力张量 \mathbf{T} 的柱坐标分量为

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} T_{rr} & T_{r\theta} & T_{rz} \\ T_{\theta r} & T_{\theta\theta} & T_{\theta z} \\ T_{zr} & T_{z\theta} & T_{zz} \end{pmatrix}$$

且 $\mathbf{T} = \mathbf{T}^\top$ 。

假定无体力作用，静力学平衡满足

$$\operatorname{div}\mathbf{T} = \mathbf{0} \quad (7)$$

柱坐标系下，柯西应力张量场的散度是

$$\begin{aligned} \operatorname{div}\mathbf{T} = & \left(\frac{\partial T_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial T_{rz}}{\partial z} + \frac{T_{rr} - T_{\theta\theta}}{r} \right) \hat{\mathbf{e}}_r \\ & + \left(\frac{\partial T_{\theta r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial T_{\theta z}}{\partial z} + \frac{T_{\theta r} + T_{r\theta}}{r} \right) \hat{\mathbf{e}}_\theta \\ & + \left(\frac{\partial T_{zr}}{\partial r} + \frac{T_{zr}}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{z\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial T_{zz}}{\partial z} \right) \hat{\mathbf{e}}_z \end{aligned} \quad (8)$$

由超弹性 (hyperelasticity) 理论，弹性材料的本构关系可由应变能密度函数 W 给定。 W 可等价地写成不同应变量的函数。这里采用 W 关于 \mathbf{B} 的主不变量的函数的形式，即 $W(I_{\mathbf{B}}, II_{\mathbf{B}}, J)$ 。此时，超弹性材料的本构方程有如下一般表达式

$$\mathbf{T} = \frac{2}{J} \left(\frac{\partial W}{\partial I_{\mathbf{B}}} + I_{\mathbf{B}} \frac{\partial W}{\partial II_{\mathbf{B}}} \right) \mathbf{B} - \frac{2}{J} \frac{\partial W}{\partial II_{\mathbf{B}}} \mathbf{B}^2 + \frac{\partial W}{\partial J} \mathbf{I} \quad (9)$$

当物体是不可压缩时， W 不依赖 J ，且 $J = 1$ 。柯西应力张量形式变为

$$\mathbf{T} = 2 \left(\frac{\partial W}{\partial I_{\mathbf{B}}} + I_{\mathbf{B}} \frac{\partial W}{\partial II_{\mathbf{B}}} \right) \mathbf{B} - 2 \frac{\partial W}{\partial II_{\mathbf{B}}} \mathbf{B}^2 + \left[-\frac{2}{3} \left(I_{\mathbf{B}} \frac{\partial W}{\partial I_{\mathbf{B}}} + 2II_{\mathbf{B}} \frac{\partial W}{\partial II_{\mathbf{B}}} \right) + p \right] \mathbf{I} \quad (10)$$

按定义，流体静压 $p \equiv -\frac{1}{3}\operatorname{tr}\mathbf{T}$ ，偏应力张量 $\boldsymbol{\tau} \equiv \mathbf{T} + p\mathbf{I}$ 。 p 在不可压缩材料的形变问题中是根据具体问题的边界条件而定的。

由开立-汉弥顿定理，结合不可压缩条件有

$$\mathbf{B}^2 = \mathbf{B}^{-1} - II_{\mathbf{B}}\mathbf{I} + I_{\mathbf{B}}\mathbf{B}$$

代入式(9)得到柯西应力张量 (不可压缩情况) 的另一等价表达式

$$\mathbf{T} = 2 \frac{\partial W}{\partial I_{\mathbf{B}}} \mathbf{B} - 2 \frac{\partial W}{\partial II_{\mathbf{B}}} \mathbf{B}^{-1} - p^*\mathbf{I} \quad (11)$$

其中

$$p^* = \frac{2}{3} \left(I_{\mathbf{B}} \frac{\partial W}{\partial I_{\mathbf{B}}} - II_{\mathbf{B}} \frac{\partial W}{\partial II_{\mathbf{B}}} \right) - p \quad (12)$$

记

$$C_1 \equiv 2 \frac{\partial W}{\partial I_{\mathbf{B}}}, \quad C_2 \equiv 2 \frac{\partial W}{\partial II_{\mathbf{B}}}$$

并把 \mathbf{B} 、 \mathbf{B}^{-1} 在扭转变形下的形式 (式(2)和(3)) 代入式(11)得

$$T_{r\theta} = T_{\theta r} = T_{rz} = T_{zr} = 0 \quad (13)$$

$$T_{rr} = C_1 \alpha^{-1} - C_2 \alpha - p^* \quad (14)$$

$$T_{\theta\theta} = C_1 \alpha^{-1} - C_2 \alpha - p^* + C_1 \frac{r^2 \alpha^2 \theta_0^2}{L^2} \quad (15)$$

$$T_{\theta z} = T_{z\theta} = C_1 \frac{r \alpha^2 \theta_0}{L} + C_2 \frac{r \alpha \theta_0}{L} \quad (16)$$

$$T_{zz} = C_1 \alpha^2 - C_2 \alpha^{-2} - C_2 \frac{r^2 \alpha \theta_0^2}{L^2} - p^* \quad (17)$$

一般地, C_1 和 C_2 是关于 $I_{\mathbf{B}}$ 、 $II_{\mathbf{B}}$ 的函数。在扭转变形下由式(4)知 C_1 和 C_2 是仅关于径向坐标 r 的函数。 p^* 则暂时一般地认为是 (r, θ, z) 的函数。

把式(13)至(17)代入式(8)得:

$$\frac{\partial T_{rr}}{\partial r} + \frac{T_{rr} - T_{\theta\theta}}{r} = 0 \quad (18)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial T_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial T_{\theta z}}{\partial z} = 0 \quad (19)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial T_{z\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial T_{zz}}{\partial z} = 0 \quad (20)$$

注意到, \mathbf{T} 的所有非零分量的表达式中, 除含有 p^* 之外的项均仅依赖径向坐标 r , 故可由式(19)和(20)得出 p^* 亦仅为径向坐标 r 的函数。当材料的应变能密度函数形式确定 (即 C_1 和 C_2 形式确定) 后, 式(18)就是一个关于函数 $p^*(r)$ 的常微分方程。在我们的问题中, 采用圆柱体侧面的无牵引力边界条件 $\mathbf{T} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \mathbf{0}$, 即 $T_{rr}(\alpha^{-1/2} R_0) = 0$, 方程就封闭了。解出 $p^*(r)$ (或 $p(r)$) 的形式后, 可直接代入式(14)至(17)得出柯西应力张量任一非零分量的表达式。以下是具体步骤。

由式(18)

$$\begin{aligned} & \frac{\partial T_{rr}}{\partial r} + \frac{T_{rr} - T_{\theta\theta}}{r} = 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{dC_1}{dr} \alpha^{-1} - \frac{dC_2}{dr} \alpha - \frac{dp^*}{dr} - C_1 \frac{r \alpha^2 \theta_0^2}{L^2} = 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{dp^*}{dr} = \frac{dC_1}{dr} \alpha^{-1} - \frac{dC_2}{dr} \alpha - C_1 \frac{r \alpha^2 \theta_0^2}{L^2} \end{aligned}$$

解这一常微分方程得

$$p^*(r) = C_1 \alpha^{-1} - C_2 \alpha - G(r) \frac{\alpha^2 \theta_0^2}{L^2} + K \quad (21)$$

其中 K 是积分常数, 函数 $G(r)$ 满足 $dG(r)/dr = rC_1(r)$ 。将式(21)代入式(14)得

$$T_{rr} = \frac{\alpha^2 \theta_0^2}{L^2} G(r) + K$$

由边界条件 $T_{rr}(\alpha^{-1/2} R_0) = 0$ 可得

$$K = -\frac{\alpha^2 \theta_0^2}{L^2} G(\alpha^{-1/2} R_0)$$

故

$$T_{rr} = \frac{\alpha^2 \theta_0^2}{L^2} [G(r) - G(\alpha^{-1/2} R_0)]$$

由定积分的定义,

$$G(r) - G(\alpha^{-1/2} R_0) = -\int_r^{\alpha^{-1/2} R_0} r' C_1(r') dr'$$

最终我们得到了应力张量所有非零分量的形式为

$$T_{rr} = -\frac{\alpha^2 \theta_0^2}{L^2} \int_r^{\alpha^{-1/2} R_0} r' C_1(r') dr' \quad (22)$$

$$T_{\theta\theta} = -\frac{\alpha^2 \theta_0^2}{L^2} \int_r^{\alpha^{-1/2} R_0} r' C_1(r') dr' + C_1 \frac{r^2 \alpha \theta_0^2}{L^2} \quad (23)$$

$$T_{zz} = C_1 (\alpha^2 - \alpha^{-1}) + C_2 \left(\alpha - \alpha^{-2} - \frac{r^2 \alpha \theta_0^2}{L^2} \right) - \frac{\alpha^2 \theta_0^2}{L^2} \int_r^{\alpha^{-1/2} R_0} r' C_1(r') dr' \quad (24)$$

$$T_{\theta z} = T_{z\theta} = C_1 \frac{r \alpha^2 \theta_0}{L} + C_2 \frac{r \alpha \theta_0}{L} \quad (25)$$

其中为了简明的缘故 C_1 、 C_2 的径向 r 依赖性在不必要时就不明显地表示出来了。

2 使用旋转流变仪时的问题

在商用旋转流变仪上对弹性体进行扭转测试时, 图1所示的形变其实对实际情况作了简化。通常, 试样被裁成 $L_0 \ll R_0$ 的扁圆柱片, 其中 R_0 与平行板转子的半径相同。由于旋转流变仪主要是为给流体施加拖曳流场而设计的, 因此在给弹性体施加形变时, 需要通过各种方法保证转子与试样接触界面的无滑 (no-slip) 条件, 比如使用磨砂表面并施加一定的压力保证静摩擦力, 或者用可靠的胶水把界面粘牢。原则上, 如果严格保证了无滑条件, 则应发生如图2b所示的形变, 即形变前、后接触面的半径不变。如果试样的半径处处都可自由收缩, 则其与转子接触面处必定是完全自由滑移的, 于是试样也无法随着转子的转动而发生扭转 (图2(a))。图1 (式(1)) 的这种形变假定的力学分析是比较容易推算的。如果要推算图2(b) 的形变, 问题

就变成弹性体的自由表面问题，推演比较复杂，本文不涉及。但是这个问题是很值得进一步考虑的，因为我们对弹性体扭转形变行为的大部分理论认识都来自基于图1的推导结果，如果按照图2(b) 推导得到的结果有很大的不同，就可能产生误导。

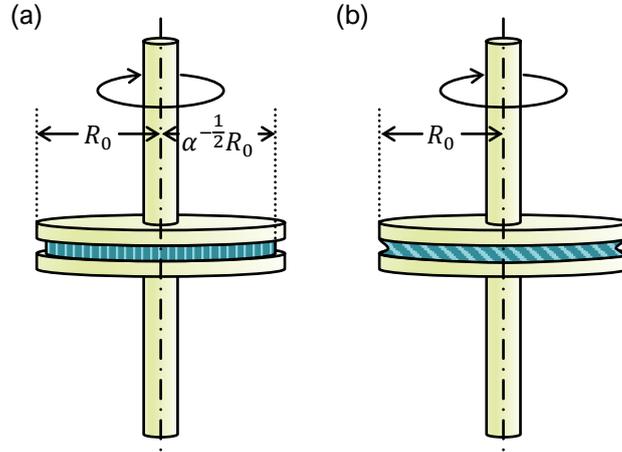


图 2: 在旋转流变仪上进行扭转测试的两种情况: (a) 若试样半径在轴向处处均可自由变化, 则其与转子接触面必须可自由滑移, 于是无法跟随转子发生扭转; (b) 若试样跟随转子发生相同角度的扭转, 必须保证试样与转子接触面完全无滑, 此时试样形变后的半径的轴向分布将不一致, 从而与图1假定的形变不符。

现在我们假定总之发生了如图1那般的形变继续讨论, 即假定就算试样半径整体发生了变化, 扭转角 θ_0 仍与仪器所控制的相同。同时, 仪器所控制的平行板间距就是试样的形变后长度 L 。仪器可通过传感器获得两个物理量。一是施加在转子上的绕旋转轴的总扭矩, 假定转子是理想刚体 (实际测量要求转子的柔量远小于试样), 这一测得的扭矩大小应该等于在试样与转子上的总扭矩 $\mathbf{M}_{\mathcal{D}}$ 的 z 分量 M_z 的大小。二是加在转子上与旋转轴平行的总力, 同理这一力的大小应该等于在试样与转子接触面的总力的 z 分量 F_z 的大小。因此, 我们的力学分析目标就是计算形变后物体上 (或下) 表面上的 M_z 和 F_z 。

形变后的上表面 \mathcal{D} 是由 $r \in [0, \alpha^{-1/2} R_0]$, $\theta \in [0, 2\pi]$ 和 $z \equiv L$ 形成的区域。记轴心点 $\mathbf{o} = (0, \theta, L)^T$, 则面 \mathcal{D} 上各处的单位法向量均为 $\hat{\mathbf{n}} = (0, 0, 1)^T$ 。故

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{\mathcal{D}} &= (M_r, M_\theta, M_z)^T \\ &= \int_{\mathcal{D}} (\mathbf{x} - \mathbf{o}) \times (\mathbf{T} \cdot \hat{\mathbf{n}}) dS \\ &= \int_{\mathcal{D}} (0, -rT_{zz}, rT_{z\theta})^T dS \end{aligned} \quad (26)$$

即， \mathcal{D} 面受到的总扭矩仍是绕轴的。大小仅由 T_{zz} 和 $T_{z\theta}$ 决定。仪器测得的仅为分量 M_z ，

$$\begin{aligned} M_z &= \int_{\mathcal{D}} r T_{z\theta} dS \\ &= 2\pi \int_0^{\alpha^{-1/2} R_0} r^2 T_{z\theta} dr \\ &= 2\pi \int_0^{\alpha^{-1/2} R_0} r^3 \left(C_1(r) \frac{\alpha^2 \theta_0}{L} + C_2(r) \frac{\alpha \theta_0}{L} \right) dr \end{aligned} \quad (27)$$

同理，总力的法向分量 F_z 可直接由 T_{zz} 在 \mathcal{D} 上的积分得到：

$$\begin{aligned} F_z &= \int_{\mathcal{D}} T_{zz} dS \\ &= 2\pi \int_0^{\alpha^{-1/2} R_0} r T_{zz} dr \\ &= 2\pi \left[\int_0^{\alpha^{-1/2} R_0} r C_1(r) (\alpha^2 - \alpha^{-1}) dr + \int_0^{\alpha^{-1/2} R_0} r C_2(r) \left(\alpha - \alpha^{-2} - \frac{r^2 \alpha \theta_0^2}{L^2} \right) dr \right. \\ &\quad \left. - \frac{\alpha^2 \theta_0^2}{L^2} \int_0^{\alpha^{-1/2} R_0} r dr \int_r^{\alpha^{-1/2} R_0} dr' r' C_1(r') \right] \end{aligned} \quad (28)$$

流变仪软件通常默认给出的是“剪切应力” σ_{meas} 和“法向应力” N_{meas} ，由软件根据测试所使用的转子，在直接测得的扭矩和轴向力的基础上乘以相应的常数得到，即

$$\sigma_{\text{meas}} = K_{\sigma} M_z, \quad N_{\text{meas}} = K_z F_z$$

其中，对于双平行板转子，

$$K_{\sigma} = \frac{2}{\pi R_0^3}, \quad K_z = \frac{1}{\pi R_0^2}$$

K_z 的理由是简单的，因为 N_{meas} 只是表征平均施加在试样单位表面上的法向力。而 K_{σ} 的表达式是来自测粘流理论的推算并作了简化。在这两个表达式中，半径都固定为 R_0 ，说明仪器报告的数据是忽略试样形变后半径变化的表观结果。

从测量学的原则来讲，我们希望在试样处于均匀形变场的前提下（即试样处处的应变张量和应力张量相同），求得 M_z 与应力张量相应分量的关系，来作为 K_{σ} 的表达式。具体到双平行板转子，测粘流理论分析的严格结果是，应力张量有径向 r 依赖性，此时我们退而求其次地只关心应力张量的径向平均值与 M_z 的关系。在扭转形变中，应力张量的分量中具有“剪切应力”意义的分量应是 $T_{z\theta}$ 。不幸的是，由式(25)可知， $T_{z\theta}$ 的结果不仅依赖径向位置 r ，还依赖材料特性 (C_1 和 C_2)，总之无法得出在不同材料之间普适的 K_{σ} 表达式。采用上列商用流变仪软件默认的公式得出的 σ_{meas} 在不同材料之间也不具备可比性。

流变仪软件还通常默认给出所控制的“剪切应变” γ 。同理，它与仪器实际控制的扭转角度之间相差一个与转子几何形状相关的系数 K_{γ} ，即

$$\gamma = K_{\gamma} \theta_0$$

对于平行板转子，商用仪器软件内置的计算公式一般是

$$K_\gamma = R_0/L$$

K_γ 也是由测粘流理论推算出来的。测粘流场是指流体处处保持局域的简单剪切 (simple shear)，简单剪切本身有一个标量值剪切应变的概念。如果一个测粘流场是均匀分布的（即测粘流各处的局域简单剪切的标量剪切应变值相同），则整个流体的标量值“剪切应变”（即 γ ）就是其局域简单剪切场的剪切应变。图1的形变是测粘流，但不是均匀的，形变梯度张量 \mathbf{F} 中具有“剪切应变”意义的分量是 $F_{\theta z} = r\theta_0\alpha/L$ ，它依赖径向位置 r 。这时也不是不可以退而求其次地将这一径向平均值当作 γ 。即

$$\gamma = \frac{1}{\alpha^{-1/2}R_0} \int_0^{\alpha^{-1/2}R_0} \frac{r\theta_0}{L} dr = \frac{\alpha^{-1/2}\theta_0R_0}{L}$$

可见，对于弹性固体试样，如果扭转叠加了拉伸或压缩，则测粘流意义上的“剪切应变”对应的 K_γ 与常见商用仪器软件默认式相差一个 $\alpha^{-1/2}$ 。换句话说，要实现严格意义上的测量，仅知道仪器控制的间距 L 是不足够的，还需要知道试样原长 L_0 。这是当我们所测量是固体而非流体时所带来的差别。

由于试样的尺寸 L_0 不属于材料的本构属性，为了理解商用仪器所报告的结果，在本文以下推导中，将仍旧采用 $\gamma \equiv \theta_0R_0/L$ 。这也是大部分资料采用的惯例。

最后，仪器报告的“剪切模量”，就是 $G_{\text{meas}} = \sigma_{\text{meas}}/\gamma$ 。可见，这个表观的“剪切模量”值依赖压缩比 α ，还因 σ_{meas} 依赖材料本构属性而失去不同材料间的比较意义。

3 常见本构模型

由第1节的讨论可知，进行弹性材料扭转形变静力学预测的焦点问题*是材料的应变能密度函数 $W(I_{\mathbf{B}}, II_{\mathbf{B}})$ （本文假定不可压缩，即 $J \equiv 1$ ）的形式。非平衡态热力学理论对 W 的形式给出了一些一般约束，具体可参见其他相关论文^[2]。本节仅零星介绍一些常见的弹性力学本构模型。

3.1 线性弹性模型

各向同性的线性弹性材料满足

$$\mathbf{T} = \lambda \text{tr}\epsilon \mathbf{I} + 2\mu\epsilon \quad (29)$$

*C. Truesdell 在 1955 年的一个德语报告中将这一问题称为 Hauptproblem^[1]。

此时，流体静压为

$$p = -\frac{1}{3} (3\lambda + 2\mu) \operatorname{tr}\boldsymbol{\varepsilon} \quad (30)$$

即已由材料本构属性所限定，而非依赖具体问题的边界条件而待定。虽然方程自动满足静力学条件(7)，但是并不满足无牵引边界条件——除非扭转前后长度不变，即 $\alpha \equiv 1$ 。也就是说，线性弹性材料只能发生不拉伸（压缩）的扭转变形，或者发生不扭转的拉伸（压缩）形变。

按照上一节的计算流程易知 $F_z = 0$ ，以及

$$M_z = \frac{\pi\theta_0\mu R_0^4}{2L} \quad (31)$$

与一般《材料力学》教材中的典型例题结果一致。

真正能够允许本文所考虑的叠加了压缩或伸的扭转变形的，必须是具有超弹性本构行为的材料。

3.2 超弹性本构方程的广义里夫林形式

依赖 \mathbf{B} 的不变量的应变能密度函数的足够一般的形式是如下级数形式

$$\begin{aligned} W = & \sum_{p,q=0}^N C_{pq} \left(I_{\mathbf{B}} (\det \mathbf{F})^{-2/3} - 3 \right)^p \left(II_{\mathbf{B}} (\det \mathbf{F})^{-4/3} - 3 \right)^q \\ & + \sum_{m=1}^M \frac{1}{D_m} (\det \mathbf{F} - 1)^{2m} \end{aligned} \quad (32)$$

其中 $C_{00} = 0$ 。对于不可压缩物体 $\det \mathbf{F} = 1$ ，则

$$W = \sum_{p,q}^N C_{pq} (I_{\mathbf{B}} - 3)^p (II_{\mathbf{B}} - 3)^q$$

在这个一般形式下，有几个常见特殊形式。比如，只有 $C_{10} \neq 0$ 时，是新虎克模型；只有 $C_{10} \neq 0$ 和 $C_{01} \neq 0$ 时，是门尼-里夫林模型；……等等。

3.2.1 新虎克/门尼-里夫林模型预测结果

门尼-里夫林模型应变能密度：

$$W = C_{10} (I_{\mathbf{B}} - 3) + C_{01} (II_{\mathbf{B}} - 3) \quad (33)$$

故

$$C_1 = 2 \frac{\partial W}{\partial I_{\mathbf{B}}} = 2C_{10} \quad (34)$$

$$C_2 = 2 \frac{\partial W}{\partial II_{\mathbf{B}}} = 2C_{01} \quad (35)$$

由式(27)和(28)得

$$M_z = \frac{\pi R_0^4 \theta_0}{L} (C_{10} + C_{01} \alpha^{-1}) \quad (36)$$

$$F_z = 2\pi R_0^2 (\alpha - \alpha^{-2}) (C_{10} + C_{01} \alpha^{-1}) \quad (37)$$

$$- \frac{\pi R_0^4 \theta_0^2}{2L^2} (C_{10} + 2C_{01} \alpha^{-1}) \quad (38)$$

真实的剪切模量为 $G = 2(C_{10} + C_{01})$ ，表观剪切模量为 $G_{\text{meas}} = 2(C_{10} + C_{01} \alpha^{-1})$ ，表观模量对 α^{-1} 呈线性依赖关系。式 xx 可改写为

$$\frac{M_z L}{\pi R_0^4 \theta_0} = C_{10} + \frac{C_{01} L_0}{L} \quad (39)$$

因此，试样压缩到不同厚度 L 、扭转不同角度 θ_0 所得到的扭矩 M_z 数矩，在用 $\frac{M_z L}{\pi R_0^4 \theta_0}$ 对 L^{-1} 作图时，如果上述条件范围内材料行为满足门尼-里夫林模型，则将会得到一条直线。这可作为验证材料是否满足门尼-里夫林模型的方法。

令 $C_{01} = 0$ 则为新虎克模型的预测。此时扭矩不受压缩比影响，但法向力仍受扭转角影响。

新虎克模型和门尼-里夫林模型都只适用于聚合物交联网络的网链不偏离高斯构象太多的拉伸比范围。在更大的拉伸比下，网链构象的非高斯性乃至有限拉伸性将反映在力学响应上的明显应变硬化，而应变硬化是这两个模型无法预测的。

3.3 基于 Seth-Hill 广义应变的模型

R. Ogden 在 1974 年引入 Seth-Hill 应变张量：

$$\mathbf{E}^{(m)} = \frac{1}{2m} (\mathbf{U}^{2m} - \mathbf{I}) = \frac{1}{2m} (\mathbf{C}^m - \mathbf{I})$$

特别地，当 $m = 1$ 时就是格林-拉格朗日应变张量， $m = 1/2$ 时是比奥特应变张量， $m = 0$ 时是真应变/亨基应变张量， $m = -1$ 时是阿尔曼西应变张量。用 $\mathbf{E}^{(n)}$ 代替 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 或 \mathbf{B} （包括它们的主不变量），可将线性弹性模型或广义里夫林模型，扩展为新的超弹性模型，其中“指数” m 也成了模型参量。它调节的是应变硬化的剧烈程度。只有 $C_{10} \neq 0$ 时，是 Blatz-Sharda-Tschoegl (BST) 模型。以 Ogden 命名的模型（有几种不同的版本）当然也属此类。

3.4 橡胶弹性网络结构模型

这是一类从聚合物弹性体的微观结构出发建立的模型。建立的一般策略包括两步。第一步是推算单链形变；第二步是对单链如何形成网络结构作出假定，并基于此统计大量链形成的宏观网络的形变响应。比如 Arruda-Boyce 模型、Palmer-Boyce 模型等。

3.5 其他现象学模型

比如 Gent 模型:

$$W = -\frac{\mu J_m}{2} \ln \left(1 - \frac{I_B - 3}{J_m} \right), \quad J_m \gg 1, \quad I_B < J_m + 3$$

从设计意图上看, Gent 模型属于考虑链的有限拉伸性而预测应变硬化的一类模型。Gent 模型是此类模型中最简单和常用的。在文献当中 Gent 模型还有若干种基于上式的变种。

Gent 模型当 $I_B - 3 \rightarrow J_m$ 时是发散的, 而在 $J_m \rightarrow \infty$ 时退回到新虎克模型。

冯元桢–Demiray 模型:

$$W = \frac{\mu}{2b} (\exp [b (I_B - 3)] - 1), \quad b > 0 \quad (40)$$

与 Gent 模型类似, 冯元桢–Demiray 模型也是用于考虑有限拉伸性造成的应变硬化的模型。与 Gent 模型相对映的是, 冯元桢–Demiray 模型中用指数函数来描述应变硬化的。参数 $b \rightarrow 0$ 时退回到新虎克模型。

4 坡印亭效应的模型预测

直观而言, 坡印亭效应是指, $|\gamma| > 0$ 时, 若保持 $F_z = 0$, 则 $\alpha > 1$ 。也就是说, 材料在扭转时有伸长的趋势。如果材料的行为是相反的, 则称“反坡印亭效应”。推广而言, 材料在给定 α 和 γ 下的形变状态邻近, 如果 $\frac{\partial F_z}{\partial |\gamma|} < 0^*$, 即增加扭转度需要辅以额外的轴向压缩力, 则相当于材料在这一状态附近表现为经典坡印亭效应, 反之则为反坡印亭效应。这种推广的定义允许了一个材料在不同拉伸(压缩)或不同扭转程度下, 表现或正或反的坡印亭效应的可能, 即一个材料体现正还是反坡印亭效应, 除依赖材料本身的本构属性外, 还依赖其当下所处的形变状态。这种情况将会在不同模型的预测结果中被看到。具体地, 由于 F_z 是 α 和 γ 的函数, 故这一偏导数表达式也是 α 和 γ 的函数。由第一节的讨论结果, 不同模型的预测, 可依据该模型的应变能密度函数的表达式, 用式(28)求得。如果推算解析表达式有困难, 也可以通过数值方法来估计。

事实上, 第 3 节介绍的这些经典本构关系的预测结果, 全都已有报道了, 故此略去详细结果的罗列。简言之, 新虎克模型与门尼–里夫林模型总是表现经典坡印亭效应。近年来的研究发现, 对于各向同性的超弹性材料, 当应变硬化比较明显时; 以及材料具有特定的各向异性时, 材料就有可能显示反坡印亭效应(在特定的 α 和 γ 区间)^[3]。

实验上看到的反坡印亭效应现象的报道也不少。本文重点关心的是理论预测, 故不再综述实验报道结果。简言之, 实验上反坡印亭效应的实例, 大致上并不超出“明显应变硬化”或

*我们也可以采用 $\gamma^{-1} \frac{\partial F_z}{\partial \gamma}$ 来讨论相同的问题。

“特定的各向异性”这两个机制。在实际应用中，水凝胶在良溶剂下处于高溶胀度时，一般具有明显的应变硬化；皮肤、筋腱等生物软组织不仅表现出远超橡胶材料的应变硬化行为，还具有各向异性。所以，用旋转流变仪测量这些软弹性材料的力学性能时，需要考虑不可忽略的坡印亭效应所带来的复杂性。

参考文献

- [1] TRUESDELL C. Das ungelöste Hauptproblem der endlichen Elastizitätstheorie[J/OL]. ZAMM - Journal of Applied Mathematics and Mechanics / Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik, 1956, 36(3-4):97-103. eprint: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1002/zamm.19560360304>. <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/zamm.19560360304>. DOI: <https://doi.org/10.1002/zamm.19560360304>.
- [2] UPADHYAY K, SUBHASH G, SPEAROT D. Thermodynamics-based stability criteria for constitutive equations of isotropic hyperelastic solids[J/OL]. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 2019, 124: 115-142. <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022509618306847>. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jmps.2018.09.038>.
- [3] HORGAN C O, MURPHY J G. Poynting and reverse Poynting effects in soft materials[J/OL]. Soft Matter, 2017, 13: 4916-4923. <http://dx.doi.org/10.1039/C7SM00992E>. DOI: [10.1039/C7SM00992E](https://doi.org/10.1039/C7SM00992E).