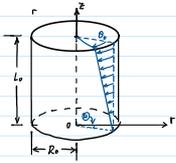


压缩扭转形变

2021年9月30日 星期四 上午8:42



如图所一长 \$L\$，半径 \$R\$ 的弹性棒，发生扭转时上表面与下表面角度差为 \$\alpha\$。假设棒在轴向上均匀分布，在柱坐标下，考察材料点 \$\underline{x}\$ 对应 \$(R, 0, z)\$，当前材料点 \$\underline{x}\$ 对应 \$(r, \theta, z)\$。



仿照做法
 半径收缩比例均匀分布
 扭转分布，假设径向均匀分布

$$\begin{cases} r = f(z)R \\ \theta = \theta(z) + g(z) \\ z = \alpha z \end{cases}$$

$$\underline{F} = \begin{pmatrix} f(z) & 0 & f'(z)R \\ 0 & f(z) & g'(z) \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

把 \$\text{div } \underline{T} = \underline{0}\$ 写出 \$\underline{x}\$ 后：边界曲面 \$\partial V\$ 的方程

$$\begin{cases} r = f(z)R, \\ \theta \in [0, 2\pi] \\ z \in [0, L] \end{cases}$$

或可知面上任一点 \$\underline{x}\$ 的单位法向量 \$\underline{n}_x(\underline{x})\$，\$\underline{T} \cdot \underline{n}_x\$

自由表面满足什么边界条件？这一边界条件对应于

$$\underline{T}(\underline{x}) \cdot \underline{n}_x(\underline{x}) = \lambda \underline{x} \quad \underline{T} \in \sigma$$

即关于 \$f(z)\$ \$g(z)\$ 的微分方程组。

比如要求有 traction free 条件，即 \$\underline{T}(\underline{x}) \cdot \underline{n}_x(\underline{x}) = \underline{0}\$，3个方程。不知道有没有独立的两个

考虑叠加了压缩/拉伸的扭转，参考 IMA J. Appl. Math. 79: 804 (2014)!!!

假设不可压缩，充分且必要地，\$\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 = 1\$。若各向同性，\$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha\$，这里 \$\alpha = \lambda/L\$，假设均匀扭转，则达初等映射

$$\begin{cases} r = \alpha^2 R \\ \theta = \theta + \frac{r}{L} \alpha z \\ z = \alpha z \end{cases} \quad \underline{F} = \begin{pmatrix} \alpha^2 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha^2 & \frac{r \alpha \alpha}{L} \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

这里 \$\underline{F}\$ 表示为关于当前构型 \$(r, \theta, z)\$ 的函数。
 易证 \$\det \underline{F} = 1\$，即体积是守恒的。注：\$F_{ij}^c = \frac{\partial x_i}{\partial X_j}\$

在柯西-格林应变度量

$$\underline{E} = \underline{F}^T \underline{F} = \begin{pmatrix} \alpha^4 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha^4 + \frac{r^2 \alpha^4 \alpha^2}{L^2} & \frac{r \alpha^4 \alpha}{L} \\ 0 & \frac{r \alpha^4 \alpha}{L} & \alpha^2 \end{pmatrix} \quad \underline{E}^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & -\frac{r \alpha \alpha}{L} \\ 0 & -\frac{r \alpha \alpha}{L} & \frac{r^2 \alpha^2 \alpha^2 + \alpha^2}{L^2} \end{pmatrix}$$

及其主不变量：\$I_E, II_E, III_E = J = 1\$

$$I_E = \text{tr } \underline{E} = 2\alpha^4 + \alpha^2 + \frac{r^2 \alpha^4 \alpha^2}{L^2}$$

$$II_E = \frac{1}{2} (\text{tr}^2 \underline{E} - \text{tr } \underline{E}^2) = \alpha^4 + 2\alpha^2 + \frac{r^2 \alpha^4 \alpha^2}{L^2}$$

$$III_E = J = \det \underline{E} = 1$$

无限小应变度量

$$\underline{e} = \frac{1}{2} (\underline{F} + \underline{F}^T) - \underline{I} = \begin{pmatrix} \alpha^{-2} - 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha^{-2} - 1 & \frac{r \alpha \alpha}{L} \\ 0 & \frac{r \alpha \alpha}{L} & \alpha - 1 \end{pmatrix}$$

及其主不变量：

$$I_e = \text{tr } \underline{e} = \alpha + 2\alpha^{-1} - 3$$

$$II_e = \frac{1}{2} (\text{tr}^2 \underline{e} - \text{tr } \underline{e}^2) = 3 + \alpha^{-3} - 4\alpha^{-1} + 2\alpha - 2\alpha - \frac{r^2 \alpha^2 \alpha^2}{4L^2}$$

$$III_e = \frac{(\alpha^3 - 1)^2 (\alpha^2 + 1)}{\alpha} + \frac{r^2 \alpha^2 \alpha^2}{4L^2} (\alpha^2 - 1)$$

静力学平衡时，假设体力为0，有

$$\text{div } \underline{T} = \underline{0}$$

在柱坐标下，柯西应力张量 \$\underline{T}\$ 的散度

$$\begin{aligned} \text{div } \underline{T} = & \left(\frac{\partial T_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial T_{r\theta}}{\partial \theta} + (T_{rr} - T_{\theta\theta}) \right] + \frac{\partial T_{rz}}{\partial z} \right) \hat{e}_r \\ & + \left(\frac{\partial T_{\theta r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial T_{\theta\theta}}{\partial \theta} + (T_{\theta\theta} + T_{rr}) \right] + \frac{\partial T_{\theta z}}{\partial z} \right) \hat{e}_\theta \\ & + \left(\frac{\partial T_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial T_{r\theta}}{\partial \theta} - T_{\theta r} \right] + \frac{\partial T_{zz}}{\partial z} \right) \hat{e}_z \end{aligned}$$

给定材料的应变能密度函数 \$W = W(I_E, II_E, J)\$，柯西应力张量有如下形式

$$\underline{T} = \frac{\partial W}{\partial I_E} \underline{E} + I_E \frac{\partial W}{\partial II_E} \underline{E} - \frac{\partial W}{\partial II_E} \underline{E}^2 + \frac{\partial W}{\partial J} \underline{I}$$

当不可压缩时，\$J=1\$，\$W = W(I_E, II_E)\$，柯西应力张量形式变成

$$\underline{T} = 2 \left(\frac{\partial W}{\partial I_E} + I_E \frac{\partial W}{\partial II_E} \right) \underline{E} - 2 \frac{\partial W}{\partial II_E} \underline{E}^2 + \left[-\frac{\partial W}{\partial I_E} \frac{\partial W}{\partial I_E} + 2 I_E \frac{\partial W}{\partial II_E} \right] \underline{I}$$

其中各向同性静压 \$p = -\frac{\partial W}{\partial J} \underline{I}\$ 它是依赖问题的边界条件而定的。

由开虫一汉弥尔顿原理，结合不可压缩条件有

$$\underline{E}^2 = \underline{E}^{-1} - II_E \underline{I} + I_E \underline{E}$$

代入式 得不可压缩情况下 \$\underline{T}\$ 的等价形式

$$\underline{T} = 2 \frac{\partial W}{\partial I_E} \underline{E} - 2 \frac{\partial W}{\partial II_E} \underline{E}^{-1} - p^* \underline{I}$$

其中 \$p^* = \frac{\partial W}{\partial I_E} - I_E \frac{\partial W}{\partial II_E}\$ 仍是待定的。

代入扭转形变下 \$\underline{E} \in \underline{E}^{-1}\$ 的形式，则 \$\underline{T}\$ 仅因 \$p^*\$ 待定向待定向

$$C_1 \underline{E} \equiv 2 \frac{\partial W}{\partial I_E}, \quad C_2 \underline{E} \equiv 2 \frac{\partial W}{\partial II_E}$$

则

$$\underline{T} = C_1 \underline{E} - C_2 \underline{E}^{-1} - p^* \underline{I}$$

$$T_{rr} = C_1 \alpha^{-2} - C_2 \alpha - p^*, \quad T_{\theta\theta} = T_{rz} = T_{zr} = 0$$

$$T_{\theta\theta} = C_1 \left(\alpha^{-2} + \frac{r^2 \alpha^2 \alpha^2}{L^2} \right) - C_2 \alpha - p^* \quad C_2 \alpha^{-1} - C_2 \alpha - p^* + \frac{r^2 \alpha^2 \alpha^2}{L^2} C_2$$

$$= C_2 \alpha^{-1} - C_2 \alpha - p^* + C_2 \frac{r^2 \alpha^2 \alpha^2}{L^2} = T_{rr} + C_1 \frac{r^2 \alpha^2 \alpha^2}{L^2}$$

$$T_{\theta z} = T_{z\theta} = C_1 \frac{r \alpha^2 \alpha}{L} + C_2 \frac{r \alpha \alpha}{L}$$

$$T_{\theta\theta} = C_2 (\alpha^{-2} + \frac{r\alpha\theta_0}{L^2}) - C_2\alpha - p^* \quad C_2\alpha^2 - C_2\alpha - p^* + \frac{r\alpha\theta_0}{L^2} C_2$$

$$= C_2\alpha^{-2} - C_2\alpha - p^* + C_2 \frac{r^2\alpha^2\theta_0^2}{L^2} = T_{rr} + C_2 \frac{r^2\alpha^2\theta_0^2}{L^2}$$

$$T_{\theta z} = T_{z\theta} = C_2 \frac{r\alpha^2\theta_0}{L} + C_2 \frac{r\alpha\theta_0}{L}$$

$$T_{zz} = C_2\alpha^2 - C_2 (\alpha^{-2} + \frac{r^2\alpha\theta_0^2}{L^2}) - p^*$$

$$= C_2\alpha^2 - C_2\alpha^{-2} - C_2 \frac{r^2\alpha\theta_0^2}{L^2} - p^*$$

一般地, C_1, C_2 是关于 I_1, I_2 的函数, 从而是 r 的函数, 但暂时认为是 (r, θ, z) 的函数

把 $\text{div} \underline{T} = \underline{\sigma}$ 等号左边的项消除, 可得:

$$\begin{cases} \frac{\partial T_{rr}}{\partial r} + \frac{T_{rr} - T_{\theta\theta}}{r} = 0 \\ \frac{1}{r} \frac{\partial T_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial T_{\theta z}}{\partial z} = 0 \\ \frac{1}{r} \frac{\partial T_{z\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial T_{zz}}{\partial z} = 0 \end{cases}$$

由于 $T_{\theta z}$ 除 θ 外仅依赖 r , 故上式可直接得出

$$-\frac{1}{r} \frac{\partial p^*}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{\partial p^*}{\partial z} = 0$$

即 p^* 也只依赖 r . 当材料的应变能密度函数 $W(I_1, I_2)$ 形式确定后, 式 (1) 就是一个关于 $p^*(r)$ 的微分方程,

$$\frac{\partial T_{rr}}{\partial r} + \frac{T_{rr} - T_{\theta\theta}}{r} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{dC_2}{dr} \alpha^{-2} - \frac{dC_2}{dr} \alpha - \frac{dp^*}{dr} - C_2 \frac{r^2\alpha^2\theta_0^2}{L^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{dp^*}{dr} = \frac{dC_2}{dr} \alpha^{-2} - \frac{dC_2}{dr} \alpha - C_2 \frac{r^2\alpha^2\theta_0^2}{L^2}$$

$$\Rightarrow p^*(r) = C_2\alpha^{-2} - C_2\alpha - G(r) \frac{\alpha^2\theta_0^2}{L^2} + K$$

其中 K 是积分常数, $\frac{dG(r)}{dr} = rC_2$, 将 $p^*(r)$ 代入 T_{rr} 式, 得

$$T_{rr} = \frac{\alpha^2\theta_0^2}{L^2} G(r) + K$$

本问题中采用圆柱侧面上的无牵引力边界条件, 即 $T_{rr}(\alpha^{-1}R_0) = 0$, 来封闭这一方程. 故由

$$T_{rr}(\alpha^{-1}R_0) = \frac{\alpha^2\theta_0^2}{L^2} G(\alpha^{-1}R_0) + K = 0$$

得 $K = -\frac{\alpha^2\theta_0^2}{L^2} G(\alpha^{-1}R_0)$. 故

$$\begin{cases} T_{rr} = \frac{\alpha^2\theta_0^2}{L^2} [G(r) - G(\alpha^{-1}R_0)] \\ = -\frac{\alpha^2\theta_0^2}{L^2} \int_r^{\alpha^{-1}R_0} r C_2 dr \\ T_{\theta\theta} = T_{rr} + C_2 \frac{r^2\alpha^2\theta_0^2}{L^2} = -\frac{\alpha^2\theta_0^2}{L^2} \int_r^{\alpha^{-1}R_0} r C_2 dr + C_2 \frac{r^2\alpha^2\theta_0^2}{L^2} \\ T_{zz} = C_2(\alpha^2 - \alpha^{-2}) + C_2(\alpha - \alpha^{-2} - \frac{r^2\alpha\theta_0^2}{L^2}) - \frac{\alpha^2\theta_0^2}{L^2} \int_r^{\alpha^{-1}R_0} r C_2 dr \\ T_{\theta z} = T_{z\theta} = C_2 \frac{r\alpha^2\theta_0}{L} + C_2 \frac{r\alpha\theta_0}{L} \quad (\text{占原式相同}) \end{cases}$$

上表面 θ 方向的扭矩

$$M_z = \int_D r T_{\theta z} dS = 2\pi \int_0^{\alpha^{-1}R_0} r^2 T_{\theta z} dr$$

$$= 2\pi \int_0^{\alpha^{-1}R_0} r^2 (C_2 \frac{r\alpha^2\theta_0}{L} + C_2 \frac{r\alpha\theta_0}{L}) dr$$

$$= 2\pi \int_0^{\alpha^{-1}R_0} r^3 (C_2 \frac{\alpha^2\theta_0}{L} + C_2 \frac{\alpha\theta_0}{L}) dr$$

$$F_z = \int_D T_{zz} dS = 2\pi \int_0^{\alpha^{-1}R_0} T_{zz} r dr$$

$$= 2\pi \int_0^{\alpha^{-1}R_0} [C_2(\alpha^2 - \alpha^{-2}) + C_2(\alpha - \alpha^{-2} - \frac{r^2\alpha\theta_0^2}{L^2}) - \frac{\alpha^2\theta_0^2}{L^2} \int_r^{\alpha^{-1}R_0} r C_2 dr'] r dr$$

$$= 2\pi [\int_0^{\alpha^{-1}R_0} r C_2 (\alpha^2 - \alpha^{-2}) dr + \int_0^{\alpha^{-1}R_0} r C_2 (\alpha - \alpha^{-2} - \frac{r^2\alpha\theta_0^2}{L^2}) dr - \frac{\alpha^2\theta_0^2}{L^2} \int_0^{\alpha^{-1}R_0} r dr \int_r^{\alpha^{-1}R_0} r' C_2(r') dr']$$

仪器测出的剪切应力 $Y = K_Y \theta_0 = \frac{R_0\theta_0}{L}$, 剪切应力 $\sigma = \frac{2}{\pi R_0} M_z$, 故表现剪切模量

$$G = \frac{\sigma}{\gamma} = \frac{2M_z}{\pi R_0^3} \frac{L}{R_0\theta_0} = \frac{2LM_z}{\pi R_0^4 \theta_0} = \frac{4}{R_0^3} \int_0^{\alpha^{-1}R_0} r^3 (C_2\alpha^2 + C_2\alpha) dr$$

§ neo-Hookean 模型和 Mooney-Rivlin 模型.

Mooney-Rivlin 模型的应变能密度:

$$W = \frac{C_1}{2} (I_1 - 3) + \frac{C_2}{2} (I_2 - 3)$$

其中 C_1, C_2 是常数. 当 $C_2=0$ 时即为 neo-Hookean 模型.

$$F_z = 2\pi [C_2(\alpha^2 - \alpha^{-2}) \frac{1}{2} \alpha^2 R_0^2 + (\alpha - \alpha^{-2}) C_2 \frac{1}{2} \alpha^2 R_0^2 - C_2 \frac{\theta_0^2 R_0^4}{4L^2} \alpha^{-2} - \frac{\alpha^2\theta_0^2}{L^2} C_2 \frac{1}{8} \alpha^2 R_0^4]$$

$$= 2\pi [\frac{1}{2} R_0^2 C_2 (\alpha - \alpha^{-2}) + \frac{1}{2} R_0^2 C_2 (1 - \alpha^{-2}) - C_2 \frac{\theta_0^2 R_0^4}{4L^2} \alpha^{-2} - \frac{\alpha^2\theta_0^2}{8L^2} C_2]$$

$$= \pi R_0^2 (C_2\alpha - C_2\alpha^{-2} + C_2 - C_2\alpha^{-2}) - \frac{\pi\theta_0^2 R_0^4}{4L^2} (C_2 + 2C_2\alpha^{-2})$$

$$= \pi R_0^2 (\alpha - \alpha^{-2}) (C_2 + C_2\alpha^{-1}) - \frac{\pi R_0^4 \theta_0^2}{4L^2} (C_2 + 2C_2\alpha^{-2}) = \pi R_0^2 [(\alpha - \alpha^{-2}) (C_2 + C_2\alpha^{-1}) - \frac{1}{2} (C_2 + 2C_2\alpha^{-2})]$$

$$M_z = 2\pi \frac{R_0^3 \theta_0}{4\alpha^2 L} (C_2\alpha^2 + C_2\alpha) = \frac{\pi R_0^3 \gamma}{2} (C_2 + C_2\alpha^{-1})$$

$$G = C_2 + C_2\alpha^{-2} \quad \sigma = G\gamma, \text{ 可见, 表现模量依赖于轴比, 表现应力应变关系呈线性.}$$

§ Gent 模型

测量学问题:

$$\text{由 } E = \begin{pmatrix} \alpha^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & \alpha^{-1} & \frac{r\theta_0\alpha}{L} \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

原问题是增加了拉伸的简单剪切

$$E_z = \begin{pmatrix} \alpha^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & \alpha^{-1} & \frac{r\theta_0}{L} \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} \quad E_s = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & r\theta_0/L \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$E = E_s E_z$ (先拉伸后扭转)

- 1) 非均匀形变, 因为 E 依赖径向位置 r ,
- 2) 我们发现, α 是均匀的, γ 是不均匀的.
- 3) 若 L_0 未知, α 是不可控制的, θ_0 是可控制的.

只考虑 E_s 即拉伸后的剪切应变:

$$\gamma = \frac{1}{\alpha^{-1}R_0} \int_0^{\alpha^{-1}R_0} \frac{r\theta_0}{L} dr \quad (\text{形变后的径向平均})$$

$$= \frac{\alpha^{-1}R_0\theta_0}{L}, \quad K_Y = \frac{\alpha^{-1}R_0}{L}$$

一般预测:

$$M_z = \frac{2\pi\theta_0}{L} \int_0^{\alpha^{-1}R_0} r^3 (C_2\alpha^2 + C_2\alpha) dr$$

$$F_z = 2\pi [(C_2\alpha^{-1}) \int_0^{\alpha^{-1}R_0} r C_2(r) dr + \int_0^{\alpha^{-1}R_0} r C_2(r) (\alpha - \alpha^{-2} - \frac{r^2\alpha\theta_0^2}{L^2}) dr - \frac{\alpha^2\theta_0^2}{L^2} \int_0^{\alpha^{-1}R_0} r dr \int_r^{\alpha^{-1}R_0} r' C_2(r') dr']$$

结果依赖模量参数.

$$\text{而 } T_{\theta z} = C_2 \frac{r\alpha^2\theta_0}{L} + C_2 \frac{r\alpha\theta_0}{L} = \frac{r\theta_0}{L} (C_2\alpha^2 + C_2\alpha)$$

故剪切应力的径向平均:

$$\sigma = \frac{1}{\alpha^{-1}R_0} \int_0^{\alpha^{-1}R_0} dr \frac{r\theta_0}{L} (C_2\alpha^2 + C_2\alpha)$$

$$K_\sigma = \frac{\sigma}{M_z} = \frac{1}{\alpha^{-1}R_0} \frac{L}{2\pi\theta_0} \frac{\theta_0}{L} \frac{\int_0^{\alpha^{-1}R_0} r^3 (C_2\alpha^2 + C_2\alpha) dr}{\int_0^{\alpha^{-1}R_0} r^3 (C_2\alpha^2 + C_2\alpha) dr}$$

$$= \frac{1}{2\pi\alpha^{-1}R_0} \frac{\int_0^{\alpha^{-1}R_0} r (C_2\alpha^2 + C_2\alpha) dr}{\int_0^{\alpha^{-1}R_0} r^3 (C_2\alpha^2 + C_2\alpha) dr}$$

对于 Mooney-Rivlin, $C_1, C_2 = \text{const}$, $K_\sigma = \frac{1}{\pi\alpha^{-1}R_0^2}$

(旋转流仪测得的 $K_\sigma = \frac{2}{\pi R_0^2}$, 与上述 $\alpha=1$ 时有差别, 是因为考虑的不是径向平均应力, 而是边缘处应力, 若考虑径向平均应力则 $K_\sigma = \frac{1}{\pi R_0^2}$)

Mooney-Rivlin 参数取值的约束.

I. Lin Continuum Mech. Thermodyn. 24:583

由形变过程 W 值的恒正性, 得到 $C_1 > 0, C_2 > 0$

由热力学稳定性, 得 $S_2/S_1 \leq \frac{1}{2}(2\lambda + \lambda^2)$, 特别地, 当 $\lambda=1$ 时 $S_2 \geq S_1$

拉伸

$$F_z = \pi R_0^2 (\alpha - \alpha^{-2}) (C_2 + C_2\alpha^{-1})$$

$$\sigma_{\text{avg}} = \frac{F_z}{\pi R_0^2} = (\alpha - \alpha^{-2}) (C_2 + C_2\alpha^{-1}) \quad \sigma_E(\epsilon) = \frac{(e^{2\epsilon} - e^{-2\epsilon}) (C_2 + C_2 e^{-2\epsilon})}{\epsilon}$$

$$\epsilon = \frac{F_z}{\pi(\alpha^{-1}R_0)^2} = (\alpha^2 - \alpha^{-2}) (C_2 + C_2\alpha^{-1}) \quad \Rightarrow F = 3(C_2 + C_2\alpha) + O(\epsilon)$$

$$\epsilon_{\text{avg}} = \alpha^{-1} \quad \epsilon_c = \ln \alpha$$

$C_2 + C_2\alpha > 0, C_2 > 0, C_2 > -C_2$

这是判断一个模型剪切模量最小的办法

$$W = -\frac{M J_m}{2} \ln\left(1 - \frac{I_B - 3}{J_m}\right), \quad I_B < J_m + 3 \text{ 且 } J_m > 1$$

由于 I_B 是关于 r 的增函数, 故 I_B 的最大值位于 $r = \alpha^2 R_0$.

$$I_B^{\max} = I_B|_{r=\alpha^2 R_0} = 2\alpha^{-2} + \alpha^2 + \frac{R_0^2 \theta_0^2 \alpha}{L} = 2\alpha^{-1} + \alpha^2 + \alpha \gamma^2 \equiv I(\alpha, \gamma)$$

故 Gent 模型 对应变幅度的 α 作了限制, 只有 $\{(\alpha, \gamma) \in \mathbb{R}^2 \mid I(\alpha, \gamma) < J_m + 3\}$ 上的 α 是有意义的.

$$C_1 = 2 \frac{\partial W}{\partial I_B} = \frac{J_m M}{3 - I_B + J_m}, \quad C_2 = 0$$

$$= \frac{J_m M}{3 + J_m - (2\alpha^{-2} + \alpha^2 + \frac{R_0^2 \theta_0^2}{L})}$$

$$F_2 = 2\pi \left[(\alpha^2 - \alpha^{-2}) \int_0^{\alpha^2 R_0} r C_1(r) dr - \frac{\alpha^2 \theta_0^2}{L^2} \int_0^{\alpha^2 R_0} dr \int_r^{\alpha^2 R_0} dr' r r' C_2(r') \right]$$

$$= \frac{J_m M \pi L^2}{2\alpha^2 \theta_0^2} \left[(3 + J_m - 3\alpha^2) \ln \left[1 + \frac{\theta_0^2 R_0^2 \alpha^2}{L^2 (2 - (3 + J_m)\alpha + \alpha^3)} \right] + \frac{R_0^2 \alpha \theta_0^2}{L^2} \right] \quad (\text{用 Mathematica 计算})$$

$$= \frac{J_m M \pi R_0^2}{2\alpha^2 \gamma^2} \left[(3 + J_m - 3\alpha^2) \ln \left[1 + \frac{\alpha^2 \gamma^2}{2 - (3 + J_m)\alpha + \alpha^3} \right] + \alpha^2 \gamma^2 \right]$$

$$M_2 = 2\pi \int_0^{\alpha^2 R_0} C_2(r) r^3 \frac{\alpha^2 \theta_0}{L} dr$$

$$= -\frac{J_m M \pi L R_0^2}{\alpha \theta_0} + \frac{J_m M \pi L^3 (2 - (3 + J_m)\alpha + \alpha^3)}{\alpha^3 \theta_0^2} \ln \left[1 + \frac{\theta_0^2 R_0^2 \alpha^2}{L^2 (2 - (3 + J_m)\alpha + \alpha^3)} \right]$$

$$= -\frac{J_m M \pi R_0^3}{\alpha \gamma} + \frac{J_m M \pi R_0^3 (2 - (3 + J_m)\alpha + \alpha^3)}{\alpha^3 \gamma^3} \ln \left[1 + \frac{\alpha^2 \gamma^2}{2 - (3 + J_m)\alpha + \alpha^3} \right]$$

以上结果分母都有 $\alpha \gamma$, 故不包含 $\gamma=0$ 的情况 (由物理上的理由 α 总大于零). 当 $\gamma=0$ 时 (即 $\theta_0=0$), 易得 $M_2=0$,

$$F_2 = \frac{J_m M \pi R_0^2}{2 - (3 + J_m)\alpha + \alpha^3} (\alpha^2 - \alpha^{-2}) = \frac{\pi R_0^2 J_m M}{3 - I_B + J_m} (\alpha - \alpha^{-2}), \quad M \text{ 就是剪切应力}$$

单轴拉伸测试的工程应力: $\sigma_{\text{eng}} = \frac{F_2}{\pi R_0^2} = \frac{J_m M}{3 - I_B + J_m} (\alpha - \alpha^{-2})$, 与某些材料结果一致.

现在讨论 $I(\alpha, \gamma) < J_m + 3$ 的条件, ($\alpha > 0, J_m > 1$)

$$2\alpha^{-1} + \alpha^2 + \gamma^2 \alpha < J_m + 3 \Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha^{-1} + \alpha^2 < J_m + 3 \\ \gamma^2 < \frac{-2 + (3 + J_m)\alpha - \alpha^3}{\alpha^2} \end{cases}$$

给定任一压缩比 α , 应变幅度 $|\gamma|$ 是有上限的. 特别地, 当 $\alpha=1$ 时, $\gamma^2 < J_m$.

$$0 = \frac{\partial M_2}{\partial R_0^2} = -\frac{J_m M \pi L}{2 - (3 + J_m)\alpha + \alpha^3} \gamma + \frac{2 J_m M \pi L}{3 (2 - (3 + J_m)\alpha + \alpha^3)} \gamma^3 + O(\gamma^5)$$

故表现线性剪应变量 $G_{\text{meas}} = -\frac{J_m M \pi L}{2 - (3 + J_m)\alpha + \alpha^3}$, 真模量 $G=M$.

§ Fung-Demiray 模型.

$$W = \frac{M}{2b} (\exp[b(I_B - 3)] - 1), \quad b > 0$$

$$C_1 = 2 \frac{\partial W}{\partial I_B} = M \exp[b(I_B - 3)] = M \exp \left[b \left(2\alpha^{-1} + \alpha^2 + \frac{r^2 \theta_0^2 \alpha^2}{L^2} - 3 \right) \right]$$

$$C_2 = 0$$

$$F_2 = \frac{\pi R_0^2}{2b \alpha^2 \gamma^2} \exp[b(2\alpha^{-1} + \alpha^2 - 3)] \left[e^{b\alpha \gamma^2} (\alpha - 2b + 2b\alpha^2 - b\alpha^2 \gamma^2) + 2b - 2b\alpha^2 - \alpha \right]$$

$$M_2 = \frac{\pi R_0^2 M}{b^2 \alpha^2 \gamma^3} \exp[b(2\alpha^{-1} + \alpha^2 - 3)]$$

$\gamma=0$ 的情况需要另写.

§ 循环滞后效应分析

当 $\gamma=0$ 时, 压缩或拉伸 ($\alpha \neq 1$) 就会造成非零的法向力 F_2^0 . 在给定 α 下, 由于 γ 造成的额外法向力

$$F_2^f \equiv F_2 - F_2^0 = F_2^f(\alpha, \gamma)$$

注意到, Mooney-Rivlin 模型和 Gent 模型的 F_2 表达式都明显呈 $F_2 = F_2^0 + F_2^f$, 其中 $F_2^0 = F_2^0(\alpha)$ 不依赖 γ . 因此, 在给定某 α , 发生扭转时, 若 $r^{(0f)} > 0$, 则表示扭转需额外的压缩, 否则将伸长, 此即经典循环滞后效应. 反之则为反循环滞后效应. 最直观的实验是看 $r^{(0f)}(0f)_{\alpha=1}$. 但理论上, 必须假定 $\partial F_2^0 / \partial \alpha$ 有异号的 (γ, α) 依赖性.

Mooney-Rivlin:

$$\frac{1}{\gamma} \frac{\partial F_2^f}{\partial \gamma} = -\frac{1}{2} (C_1 + 2C_2 \alpha^{-2}) < 0 \quad \forall \alpha > 0$$

故 Mooney-Rivlin 总预测经典循环滞后效应.

Gent:

$$\frac{1}{\gamma} \frac{\partial F_2^f}{\partial \gamma} = \frac{J_m M \pi R_0^2}{\alpha^2 \gamma^4} (3 + J_m - 3\alpha^2) \left[\frac{\alpha^2 \gamma^2}{2 - (3 + J_m)\alpha + \alpha^3 + \alpha^2 \gamma^2} - \ln \left(1 + \frac{\alpha^2 \gamma^2}{2 - (3 + J_m)\alpha + \alpha^3} \right) \right]$$

其中, 由 $2\alpha^{-1} + \alpha^2 < J_m + 3$ 总有 $2 - (3 + J_m)\alpha + \alpha^3 < 0$, 令 $\xi \equiv -\gamma^2 \alpha^2 / (2 - (3 + J_m)\alpha + \alpha^3) \geq 0$

$$\frac{1}{\gamma} \frac{\partial F_2^f}{\partial \gamma} = \frac{J_m M \pi R_0^2}{\alpha^2 \gamma^4} (3 + J_m - 3\alpha^2) \left[\ln \left(\frac{1}{1 - \xi} \right) - \frac{\xi}{1 - \xi} \right]$$

由 $\gamma^2 < \frac{-2 + (3 + J_m)\alpha - \alpha^3}{\alpha^2}$, $0 \leq \xi < 1$, 故 $\ln \left(\frac{1}{1 - \xi} \right) < 0$, 且 $-\frac{\xi}{1 - \xi} < 0$ 总成立.

故 $\frac{1}{\gamma} \frac{\partial F_2^f}{\partial \gamma} < 0 \Leftrightarrow (3 + J_m - 3\alpha^2) > 0$ (在已有约束下)

$$\Leftrightarrow \alpha^2 < \frac{3 + J_m}{3}$$

记 $\alpha_b \equiv \sqrt{(3 + J_m)/3}$, 由于 $J_m > 0$ 故 $\alpha_b > 1$. 即 α 在拉伸区.

也就是说, Gent 模型预测:

$$\S \text{ 经典循环滞后效应} \quad \text{当 } 0 < \alpha < \alpha_b \text{ 且 } \alpha^2 + 2\alpha^{-2} + \alpha \gamma^2 < J_m + 3$$

$\nu = \sqrt{0.5m/1}$, $\nu = \sqrt{0.5m/0}$ or $\nu = 0$ if $\nu = 0.5m/1$.

也就是说, Gent 模型 预测:

$$\begin{cases} \text{经典熵序数} & \text{当 } 0 < \alpha < \alpha_0 \\ \text{反熵序数} & \text{当 } \alpha_0 < \alpha \end{cases} \text{且 } \alpha^2 + 2\alpha^2 + \alpha^2 < J_m + 3$$

α_0 仅依赖 J_m , 是材料本身特性, 与有限拉伸性有关.

Fung-Demiray 模型:

$$\frac{1}{\nu} \frac{\partial f}{\partial \nu} = \frac{\pi R^2 M}{b^2 \alpha^2 \nu^4} e^{b(2\alpha^2 + \alpha^2)} \beta \left[1 - e^{\alpha \left(\frac{\alpha^2}{\beta} - \alpha + 1 \right)} \right]$$

其中, $x \equiv b\alpha^2 \geq 0$, $\beta \equiv 2b(\alpha^2 - \alpha^{-1}) + 1 > 1$

$$\text{故 } \frac{1}{\nu} \frac{\partial f}{\partial \nu} < 0 \Leftrightarrow 1 - e^{\alpha \left(\frac{\alpha^2}{\beta} - \alpha + 1 \right)} < 0$$

考察函数 $1 - e^{\alpha \left(\frac{\alpha^2}{\beta} - \alpha + 1 \right)} \equiv f(\alpha)$, $\alpha > 0$ 的单调性可知,

当 $1 < \beta \leq 2$ 时, $df/d\alpha < 0 \forall \alpha > 0$, 又: $f(0) = 0$, $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} f(\alpha) = 0$, 故 此时 $f(\alpha) < 0 \forall \alpha > 0$

当 $\beta > 2$ 时, $df/d\alpha$ 仅当 $\alpha > \beta - 2$ 时 > 0 , 故 在 $0 < \alpha < \beta - 2$ 时 $f(\alpha) < 0$

也就是说, 当 $1 < \beta \leq 2$ 时, 材料总是经典熵序数; 当 $\beta > 2$ 时, 材料为表现反熵序数再表现经典熵序数.

$$\beta > 2 \Leftrightarrow 2b(\alpha^2 - \alpha^{-1}) > 1 \Leftrightarrow \alpha^2 - \alpha^{-1} > \frac{1}{2b}, \text{ 这只有在 } \alpha > 1 \text{ 时有解, 即拉伸区.}$$

故 这种非单调行为 发生在特定的拉伸比区间

Ogden 模型: $\alpha = 0$ 情况, 在 $n > 6$ 时就有非单调, 且表现为正负交替的行为. 具体推导略, 见

Proc. R. Soc. A 479: 20230011 (2023)