§ 3 常见形变历史和响应

2024年4月1日 星期一 09:41

△静(稳)态性质与动(瞬)态性质

例：弹簧性质实验.

弹簧的伸长长度ΔL与所受拉力F有关。如果所受拉力是恒定的(例如挂上一个砝码)，则弹簧稳定时ΔL达到不随时间变化的稳定值。我们可以通过挂上不同重量的砝码，记录相应的稳态伸长ΔL，描点作图得到ΔL vs F的函数曲线。这条曲线在一定范围内表征着这一弹簧的静态性质，即给个常数值激励下的稳态响应。

一般地，所谓静态性质(static property)就是系统对恒定值输入的稳态输出值关系。静态性质常用稳态输出量对恒定输入量的函数形式表示。弹簧例子：

输入：施加的力 $F(t)=mg=const.$

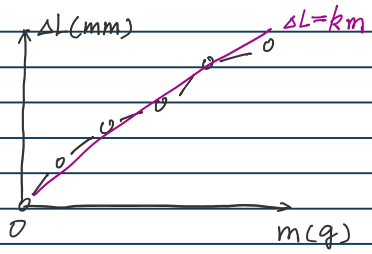
输出：稳定状态的伸长ΔL

静态性质：$\Delta L=\Delta L(mg)$

实验上可通过描点法获得静态性质的函数形式。通过内插(interpolate)或外推(extrapolate)

m (g)	ΔL (mm)
m_1	ΔL_1
m_2	ΔL_2
m_3	ΔL_3
⋮	⋮
m_n	ΔL_n

作图可得：

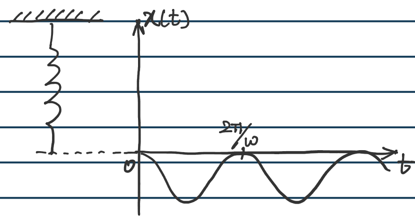


估计其他恒定负重下的伸长度。

如果我们已知，弹簧伸长与负重的一般规律，即$\Delta L=kF$，则可用此式对数据进行拟合(fitting)，找到最佳k值，则该弹簧的属性可进一步用一个参数k来描述。

通过仔细的实验观察可以发现，砝码刚挂上弹簧不久，弹簧的伸长率随时间振荡，需等一段时间等待其恢复稳定再读取数据。理论上，按照牛顿力学基本定律，弹簧长度L满足：

$$m\ddot{x}(t)=-kx(t)-mg,\quad \dot{x}(0)=0,\quad x(0)=0$$

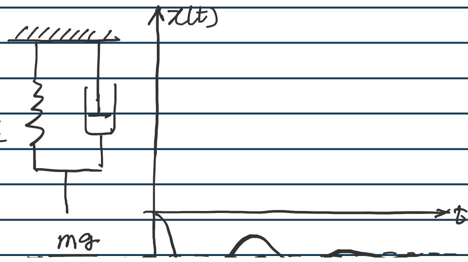


这个方程的解为

$$x(t)=g\,\omega^2[\cos(\omega t)-1] \quad 其中\ \omega=\sqrt{\frac{m}{k}}$$

说明仅考虑胡克定律，只能预测弹簧将永不衰减地一直振荡。实际弹簧材料将生热而逐渐损失机械能。它更像一个Kelvin-Voigt模型：

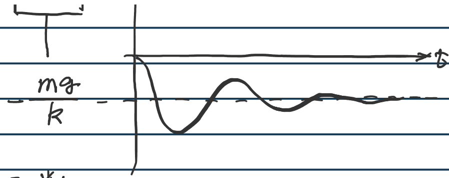
$$\ddot{x}(t)=-\gamma\omega\dot{x}(t)-\omega^2x(t)-mg,\quad \dot{x}(0)=0,\quad x(0)=0$$



这个方程的解较长此略，行为像右图。在$t\to\infty$时趋于恒定值的连续函数。

我们把$x(t)$在$t\to\infty$之前(有限t)的行为称为弹簧对

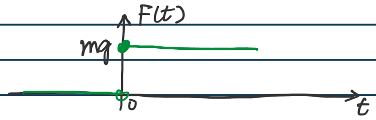
定值的连续函数.



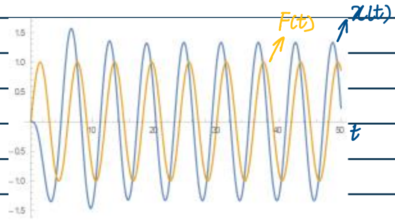
我们把 $x(t)$ 在 $t\to\infty$ 之前(有限 t)的行为称为弹簧对恒定负载的动态响应(dynamic response).

严格地，上述实验的所谓恒定负载，是一个形如下式的函数：

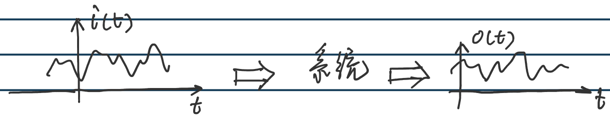
$$F(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ mg, & t\geq 0\end{cases}$$



输入正弦形式的 $F(t)$，$F(t)=F_0\sin(\omega_0 t)$，则 Kelvin-Voigt 的动态响应在 $t\to\infty$ 时不趋于固定值，而是一个与 $F(t)$ 同频率，相位角相差，$x(t)\big|_{t\text{很大}}\simeq L_0\sin(\omega_0 t+\delta)$ (推导略)。其中相位差 δ 与 ω,ω_0 和 γ 有关。



一般地，所谓动态性质(dynamic property)是指系统对随时间变化的输入 $i(t)$ 所作的响应 $o(t)$



Kelvin-Voigt 模型例子：

输入：施加的力 $F(t)$
输出：弹簧位移 $x(t)$
动态性质：$x(t)=\mathfrak{F}\{F(t)\}$

其中花体字母 $\mathfrak{F}\{\cdot\}$ 表示的是"函数的函数"即泛函(functional)。静态性质只是一种特殊的动态性质，即当 $F(t)=\text{const.}$ 时，弹簧的响应 $x(t)$ 在长时间能够趋于稳定值时，才能进行讨论的。从上述理想虎克弹簧的例子可知，这在理论上没有保证。实际的弹簧都不是理想虎克弹簧，至少也得是一个 Kelvin-Voigt 模型。

泛函关系不能通过"描点法作图"来实验测定。怎么办？

如果已知如何由任一 $F(t)$ 算出 $x(t)$ (例如上列 Kelvin-Voigt 模型的微分方程)，怎么得到具体某弹簧的参数 k 和 γ？

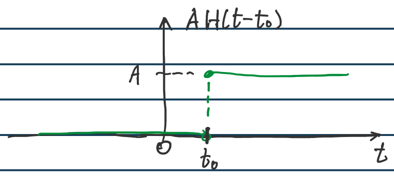
在流变学中材料的本构关系是应力(张量场)与应变(张量场)的泛函关系。理论上，通过实验完全地确定一个试样的本构关系是极其困难的。

§ 常见应变/应力历史函数及其性质.

1) 单位阶跃(unit step)函数 $H(t)$

简易定义：

$$H(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ 1, & t\geq 0\end{cases}$$

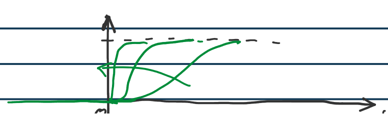


严格定义(其中一种)：

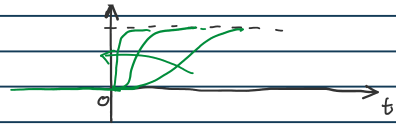
$H(t)=\int_{-\infty}^{t}\delta(u)\,du$，其中 $\delta(x)$ 是狄拉克 δ 函数，后面会介绍

此时又称赫维赛德(Heaviside) θ 函数

实验上，只能进行近似的控制。



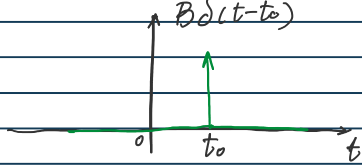
实验上，只能进行近似的控制。



2) 单位脉冲(unit impulse)函数 $\delta(t)$

简易定义：

$$\delta(t)=\begin{cases}+\infty, & t=0\\ 0, & t\neq 0\end{cases} \quad 且 \quad \int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)\,dt\equiv 1$$

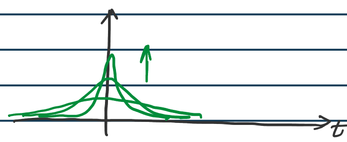


严格定义(其中一种)：

$$\delta(t)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\omega t}\,d\omega$$

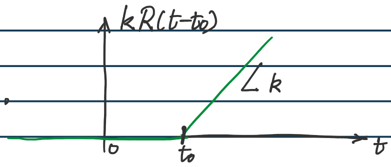
此时又称狄拉克(Dirac) δ 函数。

实验上只能进行近似的控制



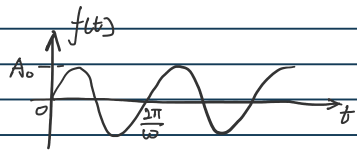
3) 斜坡(ramp)函数 $R(t)$

$$R(t)=\begin{cases}t, & x\geq 0\\ 0, & x<0\end{cases}$$ 易知 $R(t)=tH(t)$。



4) 正弦振荡：

$f(t)=A_0\sin(\omega t)$. $\quad f^{(n)}(t)=?$



5) 一些性质

$$H(t)=\int_{-\infty}^{t}\delta(t')\,dt'$$

$$\delta(t)=\frac{dH(t)}{dt}$$

$$R(t)=\int_{-\infty}^{t}H(t')\,dt'=tH(t)$$

$$H(t)=\frac{dR(t)}{dt}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\,\delta(t-a)\,dt=f(a)$$ ，特别地 $$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)\,dt=1$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\,H(t-a)\,dt=\int_{a}^{\infty}f(t)\,dt$$

§ 常见流变测试模式

为简单起见，以下所提到的"应力"和"应变"都是标量值的时间函数。作为标量，可理解为应力的剪切分量 τ_{12}，法向应力差($\tau_{11}-\tau_{22}$ 和 $\tau_{22}-\tau_{33}$)，以及简单剪切下的剪切应变或单轴拉伸下的拉伸应变 ε，它们在材料中处处取值相同。

1) 蠕变(creep)

输入：拉伸或剪切应力 $\sigma(t)=\sigma_0 H(t)$

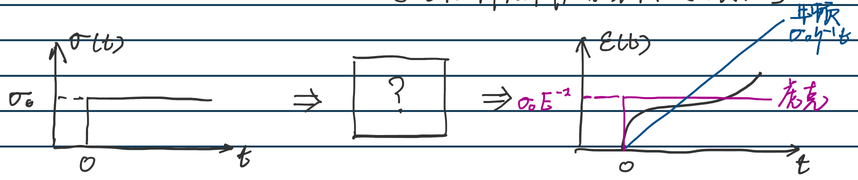
输出：拉伸或剪切应变 $\varepsilon(t)$ 或 $\gamma(t)$

蠕变柔量(creep compliance)：$J(t)\overset{def}{=}\frac{\varepsilon(t)}{\sigma_0}$ 常用单位：Pa^{-1}

输出：拉伸或剪切应变 $\varepsilon(t)$ 或 $\gamma(t)$

蠕变柔量（creep compliance）：$J(t) \overset{\text{def}}{=} \dfrac{\varepsilon(t)}{\sigma_0}$，常用单位：$Pa^{-1}$

（以拉伸为例，剪切的定义类似）



为什么没有 ε 与 σ 反号
为什么没有减函数？

胡克固体满足：$\sigma(t)=E\varepsilon(t)$，在蠕变测试中，

$$\varepsilon(t)=\frac{\sigma_0}{E}H(t)，故 J(t)=E^{-1}=常数，t>0$$

牛顿流体满足：$\sigma(t)=\eta\dot{\gamma}(t)$，在蠕变测试中，

$$\dot{\gamma}(t)=\sigma(t)/\eta=\sigma_0 H(t)/\eta，\quad \gamma(t)=\int_{-\infty}^{t}\sigma_0/\eta\, H(t)\,dt=\sigma_0/\eta\; t\,H(t)$$

故 $J(t)=t/\eta，t>0$

Kelvin-Voigt 模型（忽略惯量）满足：

$E\gamma(t)+\eta\dot{\gamma}(t)=\sigma(t)$，记 $\tau=\eta/E$，称 Kelvin-Voigt 模型的松弛时间。

在蠕变测试中，$\sigma(t)=\sigma_0 H(t)$，$\gamma(0)=0$，解得 $\gamma(t)=\dfrac{\sigma_0}{E}(1-e^{-t/\tau})H(t)$

故 $J(t)=E^{-1}(1-e^{-t/\tau})=E^{-1}(1-e^{-1/De})$，

当 $De\to 0$ 时，$J(t)=E^{-1}$，

当 $De\to\infty$ 时，由 $e^{x}=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!}$，$J(t)\approx E^{-1}[1-(1-De^{-1})]=t/\eta$

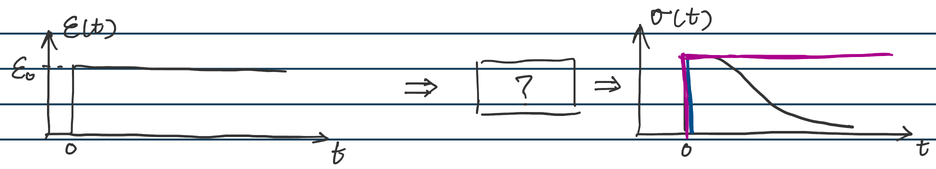
2) 应力松弛（stress relaxation）

输入：拉伸或剪切应变 $\gamma(t)=\gamma_0 H(t)$
输出　　　　　应力 $\sigma(t)$。

应力松弛模量（stress relaxation modulus）：

剪切：$G(t)\overset{\text{def}}{=}\dfrac{\sigma(t)}{\gamma_0}$ ←剪切应力，　拉伸：$E(t)\overset{\text{def}}{=}\dfrac{\sigma(t)}{\varepsilon_0}$ ←拉伸应力

永久模量/平衡模量：$G_{eq}\overset{\text{def}}{=}\lim\limits_{t\to\infty}G(t)$，$E_{eq}\overset{\text{def}}{=}\lim\limits_{t\to\infty}E(t)$



为什么没有反号？
为什么没有增函数？

胡克固体的应力松弛：

牛顿流体的应力松弛：

Kelvin-Voigt 模型的应力松弛

Maxwell 模型的应力松弛。

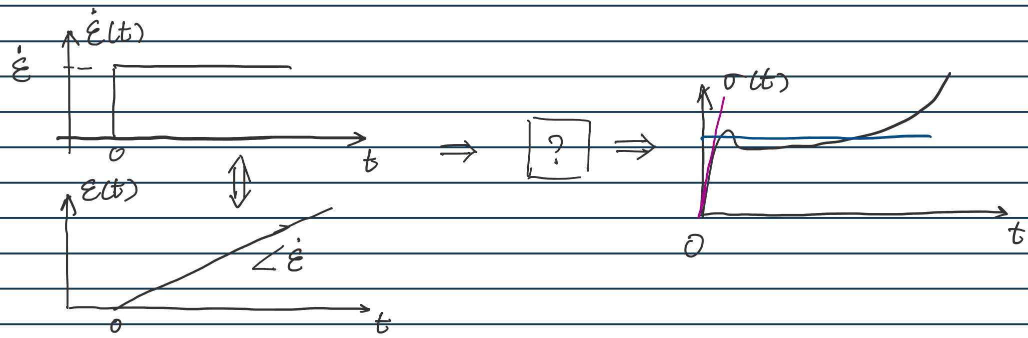
如果输入剪切应变，除关心剪切应力输出外，还要关心第一和第二法向应力差 $N_1(t)$ 和 $N_2(t)$。

第一法向应力差系数 $\Psi_1(t) \overset{def}{=} N_1(t)/\dot{\gamma}^2(t)$，$\Psi_2(t) \overset{def}{=} N_2(t)/\dot{\gamma}^2(t)$

所有线性元件模型都假定了 $N_1(t) = N_2(t) \equiv 0$

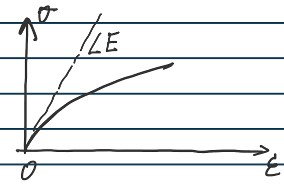
3) 应力增长 (stress growth) / 启动流 (start-up flow) / 简单拉伸 / ···

输入：应变 $\dot{\varepsilon}(t) = kH(t)$，即 $\varepsilon(t) = kR(t)$。
输出：应力 $\sigma(t)$



△ 若输入的是拉伸应变，则可定义：

杨氏模量 (Young's modulus)：由参数方程形式



$$\begin{cases} \varepsilon(t) = kH(t) \\ \sigma(t) \end{cases}$$

消去 t 得到 $\sigma = \sigma(\varepsilon)$ 形式后，进行级数展开得：

$$\sigma(\varepsilon) = a_0 + a_1\varepsilon + a_2\varepsilon^2 + \cdots \quad (\text{其中 } a_0 \text{ 必须为零})$$

$$E \overset{def}{=} a_1 = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\sigma(\varepsilon)}{\varepsilon}$$

拉伸粘度：$\eta_E^+(t) = \dfrac{\sigma(t)}{k}$，稳态拉伸粘度：$\eta_E^{ss} = \lim\limits_{t\to\infty} \eta_E^+(t)$

△ 若输入的是剪切应变，则可定义

$$G_0 \overset{def}{=} \lim_{\gamma \to 0} \frac{\sigma(\gamma)}{\gamma}$$ （类似杨氏模量的定义方法，但很少采用）

剪切粘度：$\eta^+(t) = \dfrac{\sigma(t)}{k}$，稳态剪切粘度：$\eta^{ss} = \lim\limits_{t\to\infty} \eta^+(t)$

第一、二法向应力差系数：

$$\Psi_i(t) = \frac{N_i(t)}{k^2}, \quad i = 1, 2,$$

稳态第一、二法向应力差系数：

$$\Psi_i^{ss} \overset{def}{=} \lim_{t\to\infty} \Psi_i(t), \quad i = 1, 2.$$

牛顿流体 / 虎克固体 / Kelvin-Voigt / Maxwell 模型的应力增长

4) 正弦振荡测试

(另外详述)