

§ 2 应力与应变

2024年3月26日 星期二 11:11

§ 引入

“力学性能”不是单一的性质。模量、屈服应力、密度、拉伸强度... (飞机图)

“刚度性能”也不是。...

怎样才能完善地表征某试样的刚度性能，以便预知其任意一形状条件下的刚度行为？

△ (回到高中) 外力作用在一物体的效果：

I 力：改变质心运动状态 (动量)
力矩：改变角动量。

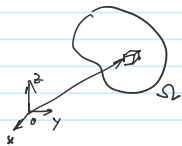
II. 改变形状

流体力学卷度 II, 理论基础：连续介质力学。

△ 什么样的应力状态能改变物体的形状？力分类：

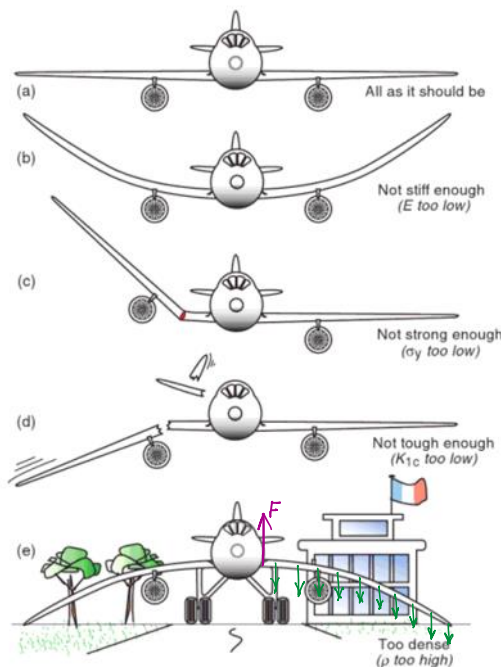
I 体力 (body force)：作用在物体各处的力。

例：密度分布 $\rho(x, y, z)$



$$m_\Omega = \iiint_\Omega dx dy dz \rho(x, y, z) \quad \bar{\rho}_\Omega = \frac{1}{V_\Omega} \iiint_\Omega dx dy dz \rho(x, y, z)$$

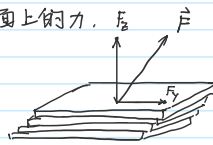
其中 $V_\Omega = \iiint_\Omega dx dy dz$



II. 接触力 (contact force)：作用在表面或截面上的力。 $\vec{F}$

动量或角动量会在物体内部传递

物体形变必须通过接触力。



△ 载荷 (loading)：使材料产生形变的力。 (单位：newton, N)

方向分类：拉伸、剪切、...

载荷常表现为力 (矩) 偶

时间特点分类：静态、动态、冲击

△ 力学本构关系 (mechanical constitutive relation) (我尝试性表述以下文字定义) PPT 动画

2) 关于外力与形变之间的定量关系

“定量”包括大小与方向

2) 完整表征材料力学性质

3) 独立于因尺寸和规模造成的差别，只与材料种类有关。 “强度量”之间的关系

4) 在数学形式上能够预测材料在任意外力作用史下的形变发展

空间分布 时间依赖 空间分布 时间依赖

本构关系的概念需在后续内容的讲解过程中逐渐理解。

§ 应力 (stress)

△ 应力 (Stress)：作用在物体单位表 (截) 面上的力。量纲： MLT^{-2} ，常用单位：Pa, psi = lb_f/in^2 , $dyne/cm^2$
(pound per square inch)

力是矢量。面也是矢量，面的大小是面积，面的方向是其法向。

物体在特定状态下所受的力是广度量。体力 $\longleftrightarrow$ 单位体积所受的力 (体积是标量)

接触力 $\longleftrightarrow$ 单位面积所受的接触力，即应力

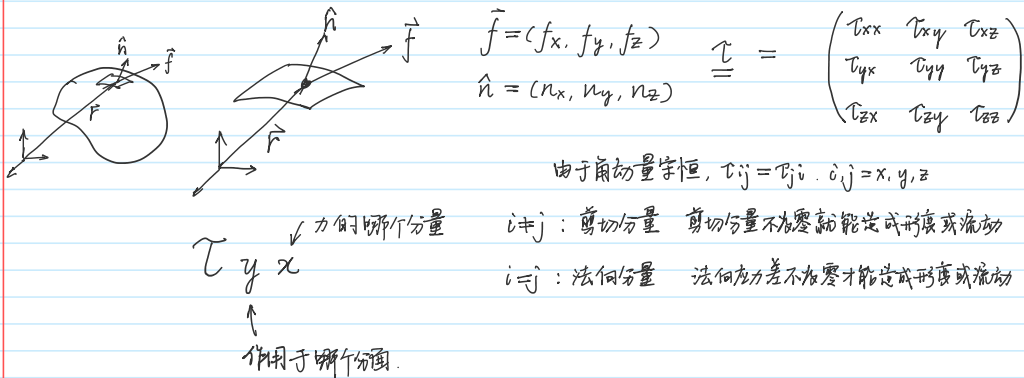
物体在特定状态下所受的力是广延量。体力 $\longleftrightarrow$ 单位体积所受的力 (体积是标量)

接触力 $\longleftrightarrow$ 单位面积所受的接触力, 即应力
还剩方向?

故应力是张量 (tensor) 总是需要九个数来完整描述某处应力状态。

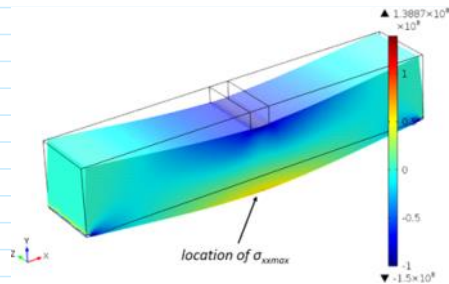
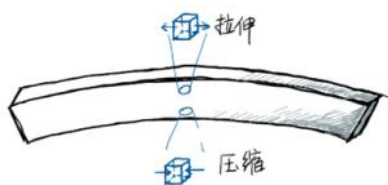
尽管是讨论同一物体的特定一个应力状态, 若所关心的截面不同, 关于该截面的接触力也不同。

具体地, 如下图所示。



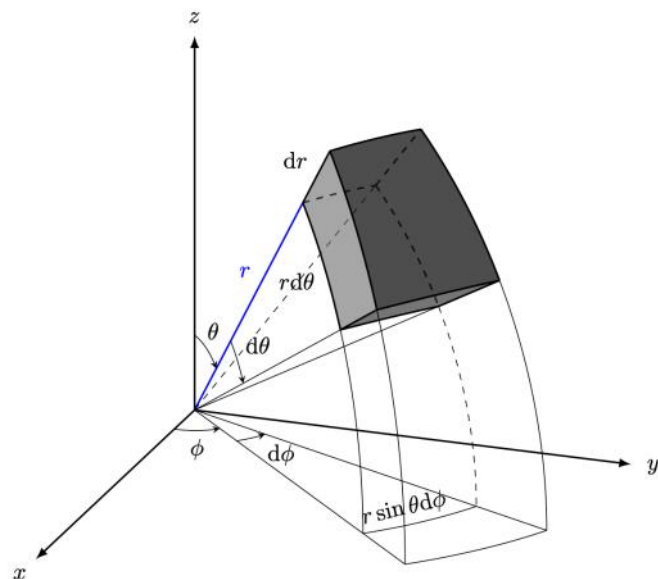
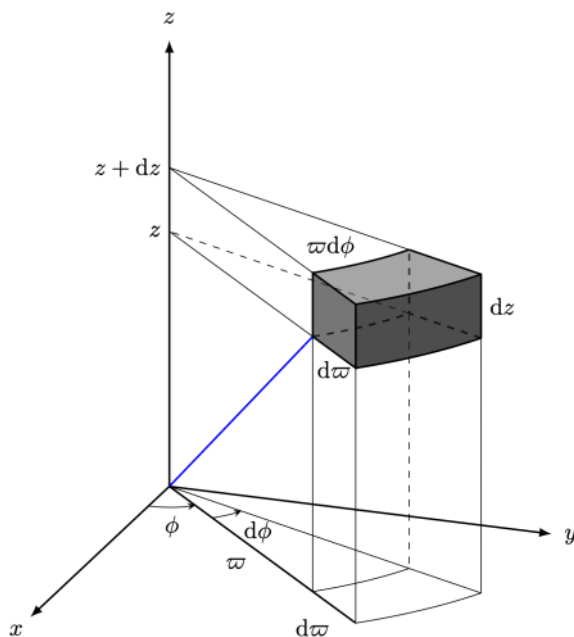
一般地, 应力在材料中处处不同, 随时间变化, 即 $\tau_{ij} = \tau_{ij}(\vec{r}, t)$, $i, j = x, y, z$, $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$

故应力是场函数 (field)。(PPT 图片)



△ 曲线坐标系下的应力分量:

曲线坐标下空间微分的方式与直角坐标系不同, 矢量分解方式也不同。

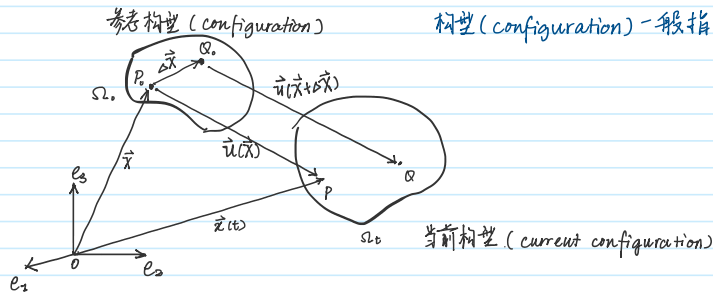


与应力

物体的形变是怎么描述的? 任务: 零重力条件下的水。PPT

参考构型 (configuration)

构型 (configuration) 一般指什么?



构型 (configuration) 一般指什么?

写出: $\begin{cases} x_1 = x_1(X_1, X_2, X_3, t) \\ x_2 = x_2(X_1, X_2, X_3, t) \\ x_3 = x_3(X_1, X_2, X_3, t) \end{cases} \quad (X_1, X_2, X_3) \in \Omega_0$ 即 $\vec{x} = \vec{x}(\vec{X}, t)$ 的具体形式。

或 $\vec{x}$ 发生在 t 时刻发生的位移 $\vec{u} = \vec{u}(\vec{X}, t)$

考虑 t_0 时刻相距 $\Delta\vec{x}$ 的 P, Q 两点处的物质, P_0 位于 $\vec{X}$,

t 时刻, 它们分别到了 P, Q 两点, 分别位移了 $\vec{u}(\vec{X})$ 和 $\vec{u}(\vec{X} + \Delta\vec{x})$

如果 $\vec{u}(\vec{X} + \Delta\vec{x}) = \vec{u}(\vec{X})$, $\forall \vec{X} \in \Omega_0$, 物体没有形变, 也没有转动。

如果 对有些 $\vec{X} \in \Omega_0$, $\vec{u}(\vec{X}) \neq \vec{u}(\vec{X} + \Delta\vec{x})$, 则物体可能发生形变或转动。

Δ 应变 (strain): 形变前后尺寸之比。量纲: 1。常见单位: %

需知: 原来相距 $\Delta\vec{x}$ 的, 现在相距?

$$\underline{\underline{F}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial X_1} & \frac{\partial x_1}{\partial X_2} & \frac{\partial x_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} & \frac{\partial x_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial X_1} & \frac{\partial x_3}{\partial X_2} & \frac{\partial x_3}{\partial X_3} \end{pmatrix}$$

$$F_{ij} = \frac{\text{现在相距}}{\text{原来相距}} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j}$$

$\underline{\underline{F}}$ 叫做形变梯度张量。

$\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{I}}$: 无刚体转动和形变

$\underline{\underline{F}}\underline{\underline{F}}^T = \underline{\underline{I}}$: 有刚体转动 无形变。

其他情况: 有形变

为什么不考虑平动和刚体转动?

“相距”是矢量, 故 应变是张量;

如何从 $\underline{\underline{F}}$ 中扣除刚体转动部份要了极分解定理 (polar decomposition)

一般地, 应变在材料中时时处处不同即 $F_{ij} = F_{ij}(\vec{X}, t)$, $\vec{X} \in \Omega_0$, 故 形变是场函数。(PPT动画)

曲线坐标下的形变分量, 与应力在此情况下需注意的问题类似, 略。

Δ 应变率 (strain rate) 常又称“应变速率”。量纲: T^{-1} 常见单位: s^{-1} “每秒”

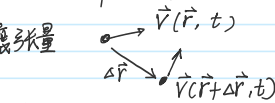
原理上, 就是应变的时间导数。流体没有固定形状, 怎么表征“形变”? PIV实验视频。

引入流速场 $\vec{v} = \vec{v}(\vec{r}, t)$ $\vec{r}$ 是空间位置, 不是物质位置, 不同于 $\vec{x}$ 和 $\vec{X}$ 。 $\vec{r} = r_1\hat{i} + r_2\hat{j} + r_3\hat{k}$

与固体不同, 应变本身在流体中不造成应力, 只有不恒零的应变率才造成应力。

$$\underline{\underline{L}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial r_1} & \frac{\partial v_1}{\partial r_2} & \frac{\partial v_1}{\partial r_3} \\ \frac{\partial v_2}{\partial r_1} & \frac{\partial v_2}{\partial r_2} & \frac{\partial v_2}{\partial r_3} \\ \frac{\partial v_3}{\partial r_1} & \frac{\partial v_3}{\partial r_2} & \frac{\partial v_3}{\partial r_3} \end{pmatrix}$$

$\underline{\underline{L}}$ 叫做速度梯度张量



流体两点间有非零相对流速, 才会产生应力

$\underline{\underline{L}} = \underline{\underline{0}}$ 可能有形变但不随时间变化

$\underline{\underline{L}} = \underline{\underline{L}}^T$ 有旋场

其它情况 有旋场或有应变率

何谓有旋流场, 以及如何从一般情况中扣除有旋部份需要深入学习。

$$L_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial r_j}$$

速度差别

相邻两点。

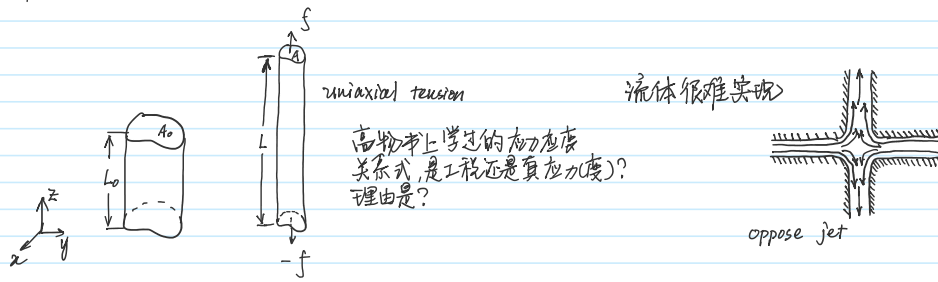
应变率是张量场。(PPT动画)

与应力和应变的简化定义

简化定义的前提:

各向同性 (isotropic) 均匀 (homogeneous) 材料, 在特定形变下, 应力或应变率 (率) 恒定且处处一致。

△ 单轴拉伸 (uniaxial extension)



拉伸应变 (tensile strains)

工程应变: $\epsilon_{\text{eng}} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{L - L_0}{L_0}$

拉伸比 (Stretch ratio): $\lambda \stackrel{\text{def}}{=} \frac{L}{L_0}$

真应变: $\epsilon_{\text{true}} \stackrel{\text{def}}{=} \int_{L_0}^L \frac{dL}{L} = \ln\left(\frac{L}{L_0}\right)$, 又叫亨基 (Henck) 应变。

假设材料不可压缩,

$\epsilon_{\text{true}} = ?$

课上没算别处别干。

拉伸应力 (tensile stress)

工程应力: $\sigma_{\text{eng}} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{f}{A_0}$ A_0 : 初始截面积

真应力: $\sigma_{\text{true}} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{f}{A}$ A : 当前截面积

假设材料不可压缩 (incompressible) (即等容形变),

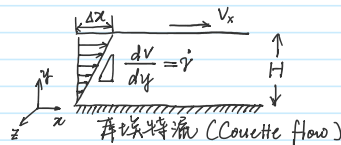
$\sigma_{\text{true}} = ?$

初始截面与当前截面关系?

应力张量表示 $\underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz} \end{pmatrix}$ $\sigma_{\text{true}} = \sigma_{zz} - \sigma_{xx} = \sigma_{zz} - \sigma_{yy}$ (洛伦同性)

剪切应变 (shear strain)

$\gamma \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\Delta x}{H} = \tan \theta$



例: 剪切应变速率.

$\dot{\gamma} = \frac{d}{dt} \gamma = \frac{1}{H} \frac{dx}{dt} = \frac{V}{H}$ (均匀流速分布)

$\dot{\gamma}(y) = \frac{dV_y}{dy}$ (流速分量 V_y 依赖位置非线性速度)

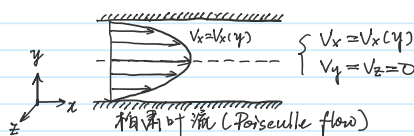
流场 $\vec{V}(F, t)$

$\begin{cases} V_x = V_x(x, y, z, t) \\ V_y = V_y(x, y, z, t) \\ V_z = V_z(x, y, z, t) \end{cases}$

$\begin{cases} V_x = \dot{\gamma} y \\ V_y = 0 \\ V_z = 0 \end{cases}$

速度梯度:

$\underline{\underline{L}} = \begin{pmatrix} \partial_x V_x & \partial_y V_x & \partial_z V_x \\ \partial_x V_y & \partial_y V_y & \partial_z V_y \\ \partial_x V_z & \partial_y V_z & \partial_z V_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \dot{\gamma} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$



△ 材料的流变学本构关系:

1) 材料的平衡形状是某种应力状态的结果, 应力状态改变导致材料形状内部运动, 即形变或流动。

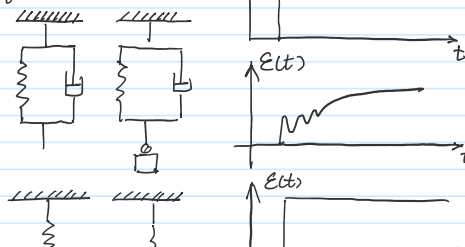
本构关系



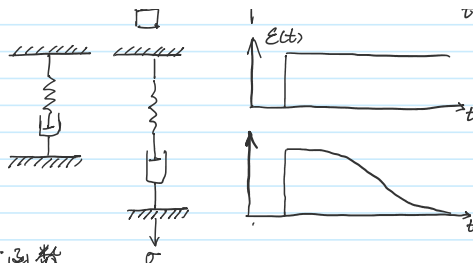
例: 蠕变 (creep)

2) 材料形状受控发生变化, 导致材料内部 (包括表面处) 应力状态发生变化。

例: 应力松弛 (stress relaxation)



例：应力松弛 (stress relaxation)



延伸的问题：

- 1) 对于同一材料, $\sigma(t)$ 与 $\gamma(t)$ 之间是否“可逆”的?
- 2) 怎么写出, 以函数为“自变量”, 得出另一个函数的数学式子?
- 3) 应力、应度不仅依赖时间, 还依赖空间分布。例: 零重力条件下的水。 } 怎么测量?
- 4) 应力、应度都是张量。
- 5) 同一材料对不同的应力(应度)历史, 作出不同的应度(应力)响应。怎么比较不同材料的差别?

后续介绍的内容:

△ 流度性质的测量方法和仪器

△ 常见的应力、应度历史, 和材料响应形式, 粘度、模量和法向应力差系数。

△ 聚合物熔体的粘流行为: 1) 温度 2) 剪切速率 3) 法向应力差 4) 结构 $\leftrightarrow$ 流度性能关系

△ 多相体系的粘流行为: 1) 体积分数, 2) 片、棒 3) 乳液、泡沫 4) 不相容共混体系

△ 线性粘弹性: 1) 线性系统的数学形式和关系 2) 记忆函数的形式和元件模型; 3) 动态测试方法; 4) 时温等效 5) 基本粘弹谱类型。

△ 非线性粘弹性: 1) 非线性粘弹性理论预测目标和难度 2) 剪切测试: 启动流, LAOS; 3) 拉伸粘度测量。