雷诺传输定理

2021年8月9日 星期一　　下午4:24

Remarks：雷诺传输定理（Reynolds transport theorem，RTT）的物理背景

1）我们关心物体B的任一部分 $P\in\mathscr{P}_t(B)$ 的广延量性质$[H]$，如质量（$[H]=m$），线动量（$[H]=\vec{p}$），角动量（$[H]=\vec{h}_o$）

2）这一广度量可写成与其对应的密度（强度量）场函数 $\theta_s(\vec{r},t)$ 在当前构型 $\Omega_t=\kappa_t(P)$ 上的体积分：

$$[H](P,t)=\int_{\Omega_t}\theta_s(\vec{r},t)\,dV_{\Omega_t},\quad P\in\mathscr{P}_t(B)$$

3）若物体B在发生连续的运动，由 $\chi(\cdot,t)=\kappa_t\circ\kappa_0^{-1}$ 描述，则广延量$[H](P,t)$在这一运动过程中的时间变化率是以下时间导数：

$$\frac{d[H](P,t)}{dt}=\frac{d}{dt}\left[\int_{\Omega_t}\theta_s(\vec{r},t)\,dV_{\Omega_t}\right],\quad P\in\mathscr{P}_t(B),$$

4）按照导数的定义，

$$\frac{d}{dt}\left[\int_{\Omega_t}\theta_s(\vec{r},t)\,dV_{\Omega_t}\right]=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\left[\int_{\Omega_{t+\Delta t}}\theta_s(\vec{r},t+\Delta t)\,dV_{\Omega_{t+\Delta t}}-\int_{\Omega_t}\theta_s(\vec{r},t)\,dV_{\Omega_t}\right]$$

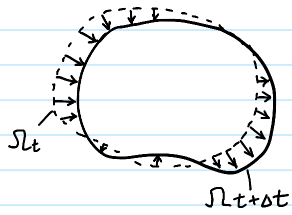
等号右边的增量不仅在于被积函数，还在于被积区域。

5）而以往的微积分知识仅告诉我们，对固定积分区域上的积分的时间偏导数求法：若

$F(t)=\int_{\Omega}f(\vec{r},t)\,dV_{\Omega}$，则

$$\begin{aligned}\frac{dF}{dt}=\frac{d}{dt}\int_{\Omega}f(\vec{r},t)\,dV_{\Omega}&=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\int_{\Omega}\left[f(\vec{r},t+\Delta t)-f(\vec{r},t)\right]dV_{\Omega}\\&=\int_{\Omega}\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\left[f(\vec{r},t+\Delta t)-f(\vec{r},t)\right]dV_{\Omega}\\&=\int_{\Omega}\frac{\partial}{\partial t}f(\vec{r},t)\,dV_{\Omega}\end{aligned}$$

（前提是所有极限和积分都存在。）



6）雷诺传输定理就是为我们解决以下问题：

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega_t}\cdot\,dV_{\Omega_t}=\int_{\Omega_t}\boxed{?}\,dV_{\Omega_t}$$

定理（雷诺传输定理）：设物体B在运动 $\chi(\cdot,t)=\kappa_t\circ\kappa_0^{-1}$ 中，有性质 $[H]:\kappa_t(\mathscr{P}_t(B))\to\mathcal{V}$，记为$[H](P,t)$，是物体的部分 $P\in\mathscr{P}_t(B)$ 在时刻t下的值，可以是标量、向量或张量，即 $\mathcal{V}$ 可以是$\mathbb{R}$，$\mathbb{R}^n$ 或 $\mathbb{R}^{n\times n}$，且

$$[H](P,t)=\int_{\Omega_t}\theta_s(\vec{r},t)\,dV_{\Omega_t},\quad \Omega_t=\kappa_t(P),\quad \theta_s:\mathbb{R}^{3+1}\to\mathcal{V}$$

则$[H]$在这一运动中的时间变化率

$$\begin{aligned}\frac{d[H]}{dt}&\left(=\frac{\partial}{\partial t}\int_{\Omega_t}\theta_s(\vec{r},t)\,dV_{\Omega_t}\right)\\&=\int_{\Omega_t}\left[\dot{\theta}_s(\vec{r},t)+\left(\frac{\partial}{\partial\vec{r}}\theta_s\right)\vec{v}_s+\theta_s\,\mathrm{div}\,\vec{v}_s\right]dV_{\Omega_t},\quad\text{形式 I}\end{aligned}$$

$$= \int_{\Omega_t} \left[\dot{\theta}_s(\vec{r},t) + \left(\frac{\partial}{\partial \vec{r}}\theta_s\right)\vec{v}_s + \theta_s \,\mathrm{div}\, \vec{v}_s \right] dV_{\Omega_t} \text{，形式 I}$$

$$= \int_{\Omega_t} \dot{\theta}_s(\vec{r},t)\, dV_{\Omega_t} + \oint_{\partial\Omega_t} \theta_s (\vec{v}_s \cdot \vec{n})\, dS_{\partial\Omega_t} \text{，形式 II.}$$

其中 $\vec{v}_s(\vec{r},t)$ 是物体在这一运动过程的速度场.

Remarks:

- 两种形式：形式I便于我们取一致的积分区域；形式II则体现了定理的物理意义：物质在运动过程中的广延量的时间变化率是两部分贡献之和。第一项是该性质场本身的变化（独立于物体运动），对于非守恒量我们允许 θ_s 凭空生成或消失。第二项是由于物体构型变化（物质点的重新分布）造成性质场的变化，表示为构型界面 $\partial\Omega_t$ 上的曲面积分。

- RTT的证明需要几个引理.

引理1：设 V 是 $\mathbb{F}$ 上的向量空间，$\mathcal{L}(V)$ 是 V 上所有线性算符的空间，则行列式函数 $\det: \mathcal{L}(V) \to \mathbb{F}$ 对向量 $\underline{\underline{B}} \in \mathcal{L}(V)$ 的导数

$$\frac{\partial}{\partial \underline{\underline{B}}} \det(\underline{\underline{A}})\Big|_{\underline{\underline{A}}=\underline{\underline{I}}} = \mathrm{tr}(\underline{\underline{B}})$$

证明：由对向量的导数的定义，对任一 $\underline{\underline{B}} \in \mathcal{L}(V)$

$$\frac{\partial}{\partial \underline{\underline{B}}} \det(\underline{\underline{A}})\Big|_{\underline{\underline{A}}=\underline{\underline{I}}} = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\det(\underline{\underline{I}}+\varepsilon\underline{\underline{B}}) - \det(\underline{\underline{I}})}{\varepsilon}$$

其中 $\det(\underline{\underline{I}}+\varepsilon\underline{\underline{B}}) = \det[-\varepsilon(-\varepsilon^{-1}\underline{\underline{I}} - \underline{\underline{B}})]$

$$= (-\varepsilon)^n \det(u\underline{\underline{I}} - \underline{\underline{B}})$$

$n \equiv \dim[\mathcal{L}(V)]$，$u \equiv -\varepsilon^{-1}$ 是 $\underline{\underline{B}}$ 的特征值，留意到 $\underline{\underline{B}}$ 的特征多项式

$$\det(u\underline{\underline{I}} - \underline{\underline{B}}) = u^n + \mathrm{tr}(\underline{\underline{B}})u^{n-1} + \cdots$$

$$\therefore \det(\underline{\underline{I}}+\varepsilon\underline{\underline{B}}) = (-\varepsilon)^n[(-\varepsilon)^{-n} + \mathrm{tr}(\underline{\underline{B}})(-\varepsilon)^{-n+1} + \cdots]$$

$$= 1 + \varepsilon\,\mathrm{tr}(\underline{\underline{B}}) + o(\varepsilon^2)$$

$$\therefore \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\det(\underline{\underline{I}}+\varepsilon\underline{\underline{B}}) - \det(\underline{\underline{I}})}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0}[\mathrm{tr}(\underline{\underline{B}}) + o(\varepsilon)] = \mathrm{tr}(\underline{\underline{I}}) \quad \square$$

引理2：接引理1的设定，

$$\left[\frac{d}{d\underline{\underline{A}}} \det(\underline{\underline{A}})\Big|_{\underline{\underline{A}}=\underline{\underline{X}}}\right]\underline{\underline{Y}} = \det(\underline{\underline{X}})\,\mathrm{tr}(\underline{\underline{X}}^{-1}\underline{\underline{Y}}), \quad \forall \underline{\underline{X}}, \underline{\underline{Y}} \in \mathcal{L}(V)$$

证明：

$$\left[\frac{d}{d\underline{\underline{A}}} \det(\underline{\underline{A}})\Big|_{\underline{\underline{A}}=\underline{\underline{X}}}\right]\underline{\underline{Y}} = \left(\frac{\partial}{\partial\underline{\underline{A}}}[\det(\underline{\underline{X}})\det(\underline{\underline{X}}^{-1}\underline{\underline{A}})]\Big|_{\underline{\underline{A}}=\underline{\underline{X}}}\right)\underline{\underline{Y}}$$

$$= \det(\underline{\underline{X}})\left[\frac{\partial}{\partial\underline{\underline{A}}}\det(\underline{\underline{X}}^{-1}\underline{\underline{A}})\Big|_{\underline{\underline{A}}=\underline{\underline{X}}}\right]\underline{\underline{Y}}$$

$$= \det(\underline{\underline{X}})\left[\frac{\partial}{\partial\underline{\underline{B}}}\det(\underline{\underline{B}})\Big|_{\underline{\underline{B}}=\underline{\underline{X}}^{-1}\underline{\underline{A}}} \frac{\partial}{\partial\underline{\underline{A}}}(\underline{\underline{X}}^{-1}\underline{\underline{A}})\Big|_{\underline{\underline{A}}=\underline{\underline{X}}}\right]\underline{\underline{Y}}$$

$$= \det(\underline{\underline{X}})\left(\left[\frac{\partial}{\partial\underline{\underline{B}}}\det(\underline{\underline{B}})\Big|_{\underline{\underline{B}}=\underline{\underline{X}}^{-1}\underline{\underline{A}}} \underline{\underline{X}}^{-1}\right]\Big|_{\underline{\underline{A}}=\underline{\underline{X}}}\right)\underline{\underline{Y}}$$

$$= \det(\underline{\underline{X}}) \left[\frac{\partial}{\partial\underline{\underline{B}}}\det(\underline{\underline{B}})\Big|_{\underline{\underline{B}}=\underline{\underline{I}}}\right]\underline{\underline{X}}^{-1}\underline{\underline{Y}}$$

这是全导数作用于一个向量，即对向量的导数，应用引理1。

$$= \det(\underline{\underline{X}}) \frac{\partial}{\partial(\underline{\underline{X}}^{-1}\underline{\underline{Y}})}\det(\underline{\underline{B}})\Big|_{\underline{\underline{B}}=\underline{\underline{I}}}$$

$$= \det(\underline{\underline{X}}) \frac{\partial}{\partial(\underline{\underline{X}}^{-1}\underline{\underline{Y}})} \det(\underline{\underline{B}})\Big|_{\underline{\underline{B}}=\underline{\underline{I}}}$$

$$= \det(\underline{\underline{X}})\, \mathrm{tr}(\underline{\underline{X}}^{-1}\underline{\underline{Y}}) \quad \square$$

推论：按引理1的设定，设$\underline{\underline{A}}$是时间t的函数，则

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\det[\underline{\underline{A}}(t)]\right) = \det \underline{\underline{A}}\ \mathrm{tr}\left(\underline{\underline{A}}^{-1}\frac{\partial}{\partial t}\underline{\underline{A}}\right)$$

Remarks：

△ 在连续介质力学中，形变梯度张量 $\underline{\underline{F}}$ 的雅可比行列式 $J=\det \underline{\underline{F}}$，则 $\dot{J} = J\,\mathrm{tr}\underline{\underline{L}} = J\ \mathrm{div}\ \vec{v}_s$

雷诺传输定理的证明：

$$\frac{d[H](P,t)}{dt} = \frac{d}{dt}\int_{\Omega_t} \theta_s(\vec{r},t)\, dV_{\Omega_t}$$

$$= \frac{d}{dt}\int_{\Omega_0} \theta_s(\chi(\vec{X},t),t)\, J\, dV_{\Omega_0}$$ 由积分度量代换定理，其中 $\Omega_0=\kappa_0(P)$，$\chi=\kappa_t\circ\kappa_0^{-1}$

$$= \int_{\Omega_0}\frac{\partial}{\partial t}\left[\theta_s(\chi(\vec{X},t),t)\ J(\vec{X},t)\right] dV_{\Omega_0}$$

△ 由于参考构型Ω_0不随时间变化，因此可应用已知的性质，将$\frac{\partial}{\partial t}$挪到积分号内。

△ $J(\vec{X},t)\equiv \det[\underline{\underline{F}}(\vec{X},t)]$，$\underline{\underline{F}}(\vec{X},t)\equiv \partial\chi(\vec{X},t)/\partial\vec{X}$

$$= \int_{\Omega_0}\left[\frac{\partial}{\partial t}\theta_s(\chi(\vec{X},t),t)\ J(\vec{X},t) + \theta_s(\chi(\vec{X},t),t)\underbrace{\frac{\partial}{\partial t}J(\vec{X},t)}_{\text{利用引理和推论，}\dot{J}=J\,\mathrm{div}\,\vec{v}_s}\right] dV_{\Omega_0}$$

△ 我们注意到 $\theta_s(\chi(\vec{X},t),t)=\theta_m(\vec{X},t)$ 但可以不必作此转换。

$$= \int_{\Omega_0}\Big[\underbrace{\frac{\partial}{\partial t}\theta_s(\chi(\vec{X},t),t)}_{\text{这个求导是对}\theta_s(\vec{r},t)\text{的物质导数}} + \theta_s(\chi(\vec{X},t),t)\ \mathrm{div}\ \vec{v}_s\Big]\underbrace{J\,dV_{\Omega_0}}_{\text{这里可再用积分度量代换式}}$$

$$= \int_{\Omega_t}\left[\frac{\partial}{\partial t}\theta_s(\vec{r},t) + \frac{\partial}{\partial\vec{r}}\theta_s(\vec{r},t)\ \vec{v}_s(\vec{r},t) + \theta_s(\vec{r},t)\ \mathrm{div}\ \vec{v}_s(\vec{r},t)\right] dV_{\Omega_t}$$

这是形式I，简写为 $\int_{\Omega_t}\left[\dot{\theta}_s + \left(\frac{\partial}{\partial\vec{r}}\theta_s\right)\vec{v}_s + \theta_s\,\mathrm{div}\,\vec{v}_s\right] dV_{\Omega_t}$

当θ_s是标量值函数时利用已知的求导规则有

$$\mathrm{div}(\theta_s\vec{v}_s) = \theta_s\ \mathrm{div}\ \vec{v}_s + \frac{\partial}{\partial\vec{r}}\theta_s\ \vec{v}_s$$

此时 形式I $= \int_{\Omega_t}\left[\frac{\partial}{\partial t}\theta_s(\vec{r},t)\right]dV_{\Omega_t} + \underbrace{\int_{\Omega_t}\mathrm{div}\left[\theta_s(\vec{r},t)\ \vec{v}_s(\vec{r},t)\right]dV_{\Omega_t}}_{\text{应用散度定理}}$

$$= \int_{\Omega_t}\left[\frac{\partial}{\partial t}\theta_s(\vec{r},t)\right]dV_{\Omega_t} + \oint_{\partial\Omega_t}\left[\theta_s(\vec{r},t)\ \vec{v}_s(\vec{r},t)\right]\cdot\vec{n}(\vec{r},t)\ dS_{\Omega_t}$$

$$= \int_{\Omega_t}\dot{\theta}_s\ dV_{\Omega_t} + \oint_{\partial\Omega_t}\theta_s(\vec{v}_s\cdot\vec{n})\,dS_{\Omega_t} \quad \text{（形式II）}$$

当θ_s是向量值函数时，不妨取标准基下坐标矩阵，则

$$\left(\frac{\partial}{\partial\vec{r}}\vec{\theta}_s\right)\vec{v}_s + \vec{\theta}_s\ \mathrm{div}\ \vec{v}_s = \begin{pmatrix} \partial\theta_{s1}/\partial r_1 & \partial\theta_{s1}/\partial r_2 & \partial\theta_{s1}/\partial r_3 \\ \partial\theta_{s2}/\partial r_1 & \partial\theta_{s2}/\partial r_2 & \partial\theta_{s2}/\partial r_3 \\ \partial\theta_{s3}/\partial r_1 & \partial\theta_{s3}/\partial r_2 & \partial\theta_{s3}/\partial r_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_{s1} \\ v_{s2} \\ v_{s3}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\theta_{s1} \\ \theta_{s2} \\ \theta_{s3}\end{pmatrix}\sum_i \frac{\partial v_{si}}{\partial r_i}$$

$$= \sum_i \begin{pmatrix} \frac{\partial\theta_{s1}}{\partial r_i}v_{si} + \theta_{s1}\frac{\partial v_{si}}{\partial r_i} \\ \frac{\partial\theta_{s2}}{\partial r_i}v_{si} + \theta_{s2}\frac{\partial v_{si}}{\partial r_i} \\ \frac{\partial\theta_{s3}}{\partial r_i}v_{si} + \theta_{s3}\frac{\partial v_{si}}{\partial r_i} \end{pmatrix} = \sum_i \frac{\partial}{\partial r_i}\begin{pmatrix}\theta_{s1}v_{si} \\ \theta_{s2}v_{si} \\ \theta_{s3}v_{si}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathrm{div}(\theta_{s1}\vec{v}_s) \\ \mathrm{div}(\theta_{s2}\vec{v}_s) \\ \mathrm{div}(\theta_{s3}\vec{v}_s)\end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial \theta_{s3}}{\partial r_i} v_{si} + \theta_{s3} \frac{\partial v_{si}}{\partial r_i}$$

$$\therefore \int_{\Omega_t} \left[\left(\frac{\partial}{\partial \vec{r}} \vec{\theta}_s \right) \vec{v}_s + \vec{\theta}_s \,\mathrm{div}\, \vec{v}_s \right] = \begin{pmatrix} \int_{\Omega_t} \mathrm{div}(\theta_{s1} \vec{v}_s)\, dV_{\Omega_t} \\ \int_{\Omega_t} \mathrm{div}(\theta_{s2} \vec{v}_s)\, dV_{\Omega_t} \\ \int_{\Omega_t} \mathrm{div}(\theta_{s3} \vec{v}_s)\, dV_{\Omega_t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \oint_{\partial\Omega_t} (\theta_{s1} \vec{v}_s) \cdot \vec{n}\, dS_{\partial\Omega_t} \\ \oint_{\partial\Omega_t} (\theta_{s2} \vec{v}_s) \cdot \vec{n}\, dS_{\partial\Omega_t} \\ \oint_{\partial\Omega_t} (\theta_{s3} \vec{v}_s) \cdot \vec{n}\, dS_{\partial\Omega_t} \end{pmatrix}$$

$$= \oint_{\partial\Omega_t} \vec{\theta}_s (\vec{v}_s \cdot \vec{n})\, dS_{\partial\Omega_t}$$

$\therefore$ 形式 I $= \int_{\Omega_t} \dot{\theta}_s \, dV_{\Omega_t} + \oint_{\partial\Omega_t} \vec{\theta}_s (\vec{v}_s \cdot \vec{n})\, dS_{\partial\Omega_t}$ （形式 II） $\square$

Remarks:

△ 当 θ_s 为线性算符或更一般的情况，形式 I 到形式 II 涉及到的散度定理要用到微分型的知识.