物质描述与空间描述

2021年11月4日 星期四　　上午2:25

△ 物体B只有被放置（映射κ_t，选定参考系φ）在空间中，才会具有物理性质。

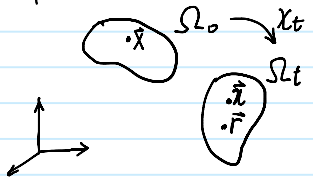
△ 物体B的强度性质可以表示成B的物质点与时刻的函数：$f: \mathcal{B}\times\mathcal{I}\to\mathcal{F}$，其中$\mathcal{F}$可以是标量、向量或向量的算符空间。（将在后面介绍物体的质量和密度时明确定一统记的理由。）我们称$f(X,t)$是物质点$X\in\mathcal{B}$在时刻t的物理性质f取值。

△ 设物体$\mathcal{B}$在选定参考系φ下的运动可由前质映射$\chi_t\equiv\kappa_t\circ\kappa_0^{-1}$描述，则每一物质点$X\in\mathcal{B}$将对应两个位置向量：

$X\in\mathcal{B}$ $\xrightarrow{\kappa_0}$ $\vec{X}=\kappa_0(X)\in\Omega_0$　参考构型中的位置向量

κ_t ↘ ↓χ_t

$\vec{x}(t)=\kappa_t(X)\in\Omega_t$　当前构型中的位置向量



△ 关于物质点X和时间的函数$f(X,t)$，在t时刻可以表示为两种位置向量的函数：

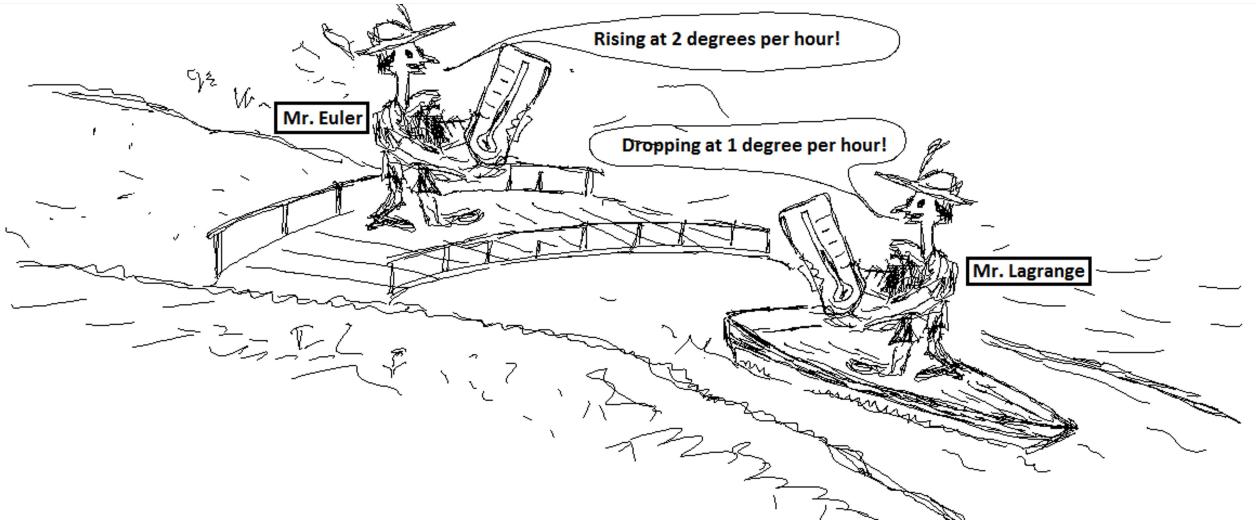
$f_m(\vec{X},t)$：参考构型中位置在$\vec{X}$处的物质点在当前的物理量取值。$f(X,t)=f_m(\kappa_0(X),t)$

$f_s(\vec{r},t)$　当前构型中位置$\vec{r}$处的物质点的物理量取值。$f(X,t)=f_s(\kappa_t(X),t)$

△ 在同一时刻，同一物质点的性质应是唯一确定的取值。因此，在给定运动下，由于$\vec{x}(t)=\chi(\vec{X},t)$，故有

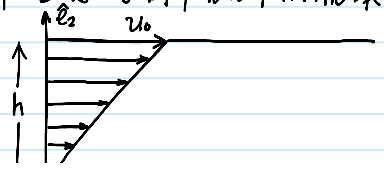
$$\begin{cases} f_m(\vec{X},t)=f_s[\chi(\vec{X},t),t], \because f_m(\vec{X},t)=f(\kappa_0^{-1}(\vec{X}),t)=f_s(\kappa_t\circ\kappa_0^{-1}(\vec{X}),t)=f_s(\chi(\vec{X},t),t) \\ f_s(\vec{r},t)=f_m[\chi^{-1}(\vec{r},t),t] \because f_s(\vec{r},t)=f(\kappa_t^{-1}(\vec{r}),t)=f_m(\kappa_0\circ\kappa_t^{-1}(\vec{r}),t)=f_m(\chi^{-1}(\vec{r},t),t) \end{cases}$$

△ 我们称，在给定运动χ_t下，$f_m(\vec{X},t)$是物体$\mathcal{B}$的性质f的物质描述（material description）或拉格朗日描述（Lagrangian description），$f_s(\vec{r},t)$是物体$\mathcal{B}$的性质f的空间描述（spatial description）或欧拉描述（Eulerian description）。上式就是同一性质在给定运动下的两种描述之间的变换关系。



例：$\mathcal{B}$是处于简单剪切下的流体　　记$\vec{X}=(X_1,X_2,X_3)$，$\vec{x}=(x_1,x_2,x_3)$，$(x_1(t),x_2(t),x_3(t))$

$=\chi_t(X_1,X_2,X_3)$



$$\chi_t:\begin{cases} x_1=X_1+\frac{X_2}{h}u_0t \\ x_2=X_2 \\ x_3=X_3 \end{cases}$$

χ_t: $\begin{cases} x_1 = X_1 + h \\ x_2 = X_2 \\ x_3 = X_3 \end{cases}$

回顾，物体B的速度 $\vec{v}(X,t) \overset{def}{=} \frac{d}{dt} K_t(X) = \frac{d}{dt}\chi(\vec{X},t)$

1) 如果从参考时刻 t_0 开始追踪每一个物质点的运动，则可知任一时刻任一被询问的物质点 X 的速度 $\vec{v}(X,t)$，且可用 X 在参考构型中的位置 $\vec{X} = K_{t_0}(X)$ 表示，相当于已知物体B速度的空间描述 $\vec{v}_m(\vec{X},t)$。

2) 如果在一系列空间位置安装流速计，获得任一时刻 t，任一空间位置 $\vec{r}$ 处的瞬时速度，则相当于已知物体B的速度的空间描述 $\vec{v}_s(\vec{r},t)$ 的函数形式。

实验1)是粒子示踪测速(particle tracking velocimetry, PTV)，实验2)是粒子成像测速(particle imaging velocimetry, PIV)。

回顾：物体B的加速度 $\vec{a}(X,t) \overset{def}{=} \frac{d}{dt}\vec{v}(X,t) = \frac{d^2}{dt^2}K_t(X) = \frac{d^2}{dt^2}\chi(\vec{X},t)$

如果通过PIV实验获得了 $\vec{v}_s(\vec{r},t)$，需要求流体的加速度场 $\vec{a}_s(\vec{r},t)$，后者不等于前者的时间偏导数。因为

$$\frac{\partial \vec{v}_s(\vec{r},t)}{\partial t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{v}_s(\vec{r},t+\Delta t) - \vec{v}_s(\vec{r},t+\Delta t)}{\Delta t}$$

但在 t 与 $t+\Delta t$ 两个时刻，同一位置 $\vec{r}$ 处的物质点可能是不同的。而加速度应是同一物质点的速度变化，所以上述偏导数不是加速度。为求 $\vec{a}_s(\vec{r},t)$，我们需要进行如下步骤：

1) 用两种描述间的转换式得到速度的物质描述：

$$\vec{v}_m(\vec{X},t) = \vec{v}_s(\chi(\vec{X},t),t)$$

2) 对左边求时间(全)导数($\vec{X}$ 不依赖时间)，得到加速度的物质描述：

$$\vec{a}_m(\vec{X},t) = \frac{d}{dt}\vec{v}_m(\vec{X},t) = \frac{d}{dt}\vec{v}_s(\chi(\vec{X},t),t)$$

$$= \frac{d\vec{v}_s(\vec{r},t)}{d\vec{r}}\bigg|_{\vec{r}=\chi(\vec{X},t)} \frac{d\chi(\vec{X},t)}{dt} + \frac{\partial \vec{v}_s(\vec{r},t)}{\partial t}\bigg|_{\vec{r}=\chi(\vec{X},t)}$$

(简化记法)

$$= \frac{d\vec{v}_s(\vec{r},t)}{d\vec{r}}\bigg|_{\vec{r}=\chi(\vec{X},t)} \vec{v}_m(\vec{X},t) + \frac{\partial \vec{v}_s(\vec{r},t)}{\partial t}\bigg|_{\vec{r}=\chi(\vec{X},t)}$$

3) 左右两边换成空间描述：

$$\vec{a}_s(\vec{r},t) = \vec{a}_m(\chi^{-1}(\vec{r},t),t)$$

$$= \frac{d\vec{v}_s(\vec{r},t)}{d\vec{r}}\bigg|_{\vec{r}=\chi_t\circ\chi_t^{-1}(\vec{X})\equiv\vec{r}} \underbrace{\vec{v}_m(\chi^{-1}(\vec{r},t),t)}_{\equiv\vec{v}_s(\vec{r},t)} + \frac{\partial \vec{v}_s(\vec{r},t)}{\partial t}\bigg|_{\vec{r}=\chi_t^{-1}\circ\chi_t(\vec{X})\equiv\vec{r}}$$

$$= \frac{\partial \vec{v}_s(\vec{r},t)}{\partial t} + \frac{d\vec{v}_s(\vec{r},t)}{d\vec{r}}\vec{v}_s(\vec{r},t)$$

△一般地，对运动中的物体的某性质场(空间描述)求时间偏导数，都不是该物体的性质变化率，需通上例中的步骤求得真正的性质变化率分布。记

$$\frac{D}{Dt}f_s(\vec{r},t) \overset{def}{=} \frac{\partial}{\partial t}f_s(\vec{r},t) + \frac{d}{d\vec{r}}f_s(\vec{r},t)\,\vec{v}_s(\vec{r},t)$$

称性质场 $f_s(\vec{r},t)$ 的物质导数(material derivative)