

物体的质量

2021年5月6日 星期四 下午9:35

△ 回顾《概率论与数理统计》(何春雄等, 高等教育出版社 2012) §1.2.4 概率的公理

1.0 定义:

- 定义 1.2.3 基本事件空间
- 定义 1.2.4 事件域与事件
- 定义 1.2.5 概率测度, 概率空间

物体及其质量, 作用于物体上的力与动量的概念, 都是基于测度空间的数学建立的。

△ 我们在之前讲过, 物体 B 是一个非空集合, 其元素是物质点 $X \in B$ 。现在我们要为物体的概念增加必要的细节, 以便引入物体的质量和力的概念, 本章先讨论质量。

△ 在经典力学中, 质量是定义在任一物体上的正实数, 表示“物质的多少”。我们要求质量满足:

- 1) 给定一个物体, 它的总质量是它各部分的和
- 2) 一个物体的质量是不变的(质量不灭), 无论物体及其部分如何移动, 加速或形变, 物体的质量都不变
- 3) 物体的质量与其形状和尺寸没有唯一的关联。

△ 借助测度空间, 我们可将物体定义为可分割成部分的集合, 这类似于《概率论与数理统计》中“事件域”的定义(定义 1.2.4, p.9)

定义(物体的部分): 给定一个物体 B , 若 $\mathcal{P}(B)$ 是 B 的子集的集合, 且满足:

- 1) $B \in \mathcal{P}(B)$
- 2) 若 $P \in \mathcal{P}(B)$, 则 $P^c \in \mathcal{P}(B)$, 其中 P^c 表示以 B 为全集时集合 P 的补集, $P^c = B \setminus P$.
- 3) $\mathcal{P}(B)$ 的元素 $P_1, P_2, \dots \in \mathcal{P}(B)$ 的可数个并集 $\bigcup_{i=1}^{\infty} P_i \in \mathcal{P}(B)$.

则称 $\mathcal{P}(B)$ 的元素为物体 B 的部分(part)。

Remarks:

- △ 由定义可直接推出 $\emptyset \in \mathcal{P}(B)$
- △ 由规范 3) 加上德摩根定律 (de Morgan's law) 可推出:

$\mathcal{P}(B)$ 的元素 $P_1, P_2, \dots \in \mathcal{P}(B)$ 的可数个交集 $\bigcap_{i=1}^{\infty} P_i \in \mathcal{P}(B)$

△ 我们发现物体 B 的部分的定义与《概》中的定义 1.2.4 是相同的。数学上, 物体 B 的所有部分的集合 $\mathcal{P}(B)$ 是集合 B 上的一个 σ -代数 (σ -algebra)。并非任一 B 的子集都满足物体部分的定义, 故 $\mathcal{P}(B)$ 一般不是 B 的所有子集的集合。

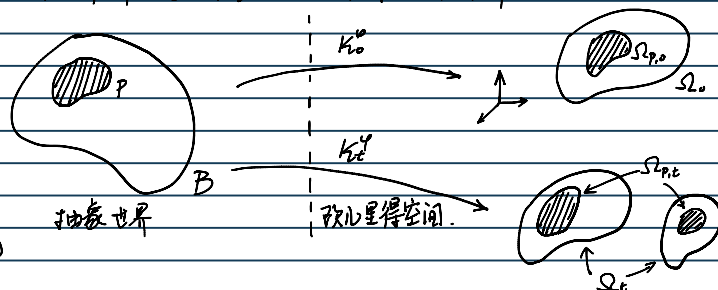
△ 物体 B 是自己的一个部分。可以证明, 物体的部分 $P \in \mathcal{P}(B)$ 也是物体, 且 P 的部分都是 B 的部分, 即 $P \in \mathcal{P}(B) \Rightarrow \mathcal{P}(P) \subset \mathcal{P}(B)$, 物体 B 与其它物体的可数并集或交集均为物体。

△ 物体的客观性: 物体 B 及其部分 $\mathcal{P}(B)$ 都定义在抽象的“物体世界”中。选定某参考系 ϕ , 物体 B 及其某部分 $P \in \mathcal{P}(B)$ 的放置给出它们在某时刻下的构型:

$$\Omega_0 = K_0^\phi(B), \quad \Omega_{P,0} = K_0^\phi(P), \quad P \in \mathcal{P}(B)$$

$$\Omega_t = K_t^\phi(B), \quad \Omega_{P,t} = K_t^\phi(P),$$

构成运动 $\chi_t = K_t^\phi \circ K_0^{\phi*}$, 由于物体运动世界线不相交, 因此放置映射是单射。因此, 两个不相交的部分 $P, Q \in \mathcal{P}(B)$ $P \cap Q = \emptyset$ 的构型 $K_t(P), K_t(Q)$ 也保持不相交(任一参考系, 任时刻), 尽管一个部分在不同放置下可映射在可数个不相交域(如图)。



定义(物体的质量): 设物体 B 的所有部分的集合是 $\mathcal{P}(B)$, 则 B 的任一部分 $P \in \mathcal{P}(B)$ 的质量 (mass) 是 $\mathcal{P}(B)$ 上的非负实数值映射 $m: \mathcal{P}(B) \rightarrow [0, \infty)$, 满足可列可加性, 即, 若 $P_1, P_2, \dots \in \mathcal{P}(B)$ 两两不相交, $P = \bigcup_{i=1}^{\infty} P_i$, 则 $m(P) = \sum_{i=1}^{\infty} m(P_i) < \infty$ 。

定义(物体的质量): 设物体B的所有部分的集合 $\mathcal{P}(B)$, 则B的任一部分 $P \in \mathcal{P}(B)$ 的质量(mass)是 $\mathcal{P}(B)$ 上的非负实数值映射 $m: \mathcal{P}(B) \rightarrow [0, \infty)$, 满足可列可加性, 即若 $P_1, P_2, \dots \in \mathcal{P}(B)$ 两两不相容, $P_i \cap P_j = \emptyset, i, j = 1, 2, \dots$, $P_i, P_j \in \mathcal{P}(B)$, 则 $m(\bigcup_{i=1}^{\infty} P_i) = \sum_{i=1}^{\infty} m(P_i) < \infty$.

Remarks:

△ 物体质量的定义与《概》中概率测度 P 的定义(定义1.2.5, p.10)很类似. 不同之处在于概率测度要求规范性, 而质量只要求有界.

△ 由定义可直接推出,

1) 若 $P \in \mathcal{P}(B)$, 则 $m(P) = 0 \Leftrightarrow P = \emptyset$

2) 若 $P \in \mathcal{P}(B)$, 则 $m(P) \leq m(B)$.

△ 单个质点也有质量, 也具有可加性. 具体地, 物体B的元素 $x_1, x_2, \dots \in B$ 形成的单元集合 $\{x_1\}, \{x_2\}, \dots \in \mathcal{P}(B)$, 且它们的可数交集 $\{x_1, x_2, \dots\} \in \mathcal{P}(B)$, 则B的可数子集 $\{x_1, x_2, \dots\}$ 的质量 $m(\{x_1, x_2, \dots\}) = \sum m(\{x_i\})$, 我们将 $m(\{x_i\})$ 简写成 $m(x_i)$.

△ 对于一个物体B, 其质量是其部分 $\mathcal{P}(B)$ 上的勒贝格积分(Lebesgue integral), 它与我们在高等数学中学过的黎曼积分(Riemann integral)是不同的, 但在连续介质力学中它们等价的条件假设总满足. 因此我们为质量加一条规范:

定义(物体的质量(续)): $m = \int_P dm$, $P \in \mathcal{P}(B)$, 若 $P = \{x_1, x_2, \dots\}$ 则 $m(P) = \int_P dm = \sum m(x_i), i = 1, 2, \dots$

Remarks:

△ 按照勒贝格积分的概念, 定义中积分与求和的等号是成立的.

△ 由于物体的质量是定义在抽象物体之上的, 故对物体B的任一部分 $P \in \mathcal{P}(B)$, 其质量 $m(P)$ 均独立于其在任一特定参考系下的构型, 因此, 质量的定义暗示:

1) 物体的质量具有框架不变性. 选定框架 φ, φ^* , 则任意时刻 t

$$m(P) = m(K_t^{-1}(\Omega_t)) = m(K_t^{*-1}(\Omega_t^*)), \text{ 其中 } P \in \mathcal{P}(B), \Omega_t = K_t(P), \Omega_t^* = K_t^*(P)$$

2) 质量不灭, 物体在运动中质量守恒.

△ 注意到, “体积”不具有抽象意义, 体积总是具体坐标系下的欧几里得空间区域的数量性质, 因此, 若定义物体的密度则密度将依赖坐标的选择.

定义(物体的密度): 对任一物体B及其部分 $\mathcal{P}(B)$, 在放置 $K_t: \mathcal{P}(B) \rightarrow \mathbb{R}^3$ 下, 存在唯一标量函数 $\rho: K_t(B) \rightarrow [0, +\infty)$ 满足

$$m(P) = \int_{K_t(P)} \rho(\vec{r}, t) dV_{K_t(P)}, P \in \mathcal{P}(B)$$

称为物体B的质量密度(mass density), 简称密度(density).

Remarks:

△ 定义中的唯一存在性是由拉东-尼科迪姆定理(Radon-Nikodym theorem)保证的, 这里不作正式介绍, 只说明等价的满足条件是: 测度空间 $(B, \mathcal{P}(B))$ 上的测度 m 关于欧几里得空间 $\mathbb{R}^3$ 上的勒贝格测度(唯一, 且等价于 $\mathbb{R}^3$ 上的求体积函数)绝对连续(absolutely continuous). 此时可零序开如 $\rho = dm/dV$ 的说法. 回顾《化工原理》(钟理等, 华工出版)§1.2.1(p.13)的引入式($\rho = \Delta m / \Delta V$ 当 $\Delta V \rightarrow 0$ 时 $\Delta m / \Delta V$ 的极限)就是陈述了这种绝对连续性.

△ 密度的引入与《概》中定义2.3.1类似, 只后者不加说明地默认了勒贝格积分与黎曼积分的等价性.

△ 物体的广延性质, 均可作为其测度, 并基于绝对连续性规定而定义与其唯一对应(共轭)的强度量.

△ 定义给出的密度场函数 $\rho(\vec{r}, t)$ 是某时刻 t 下物体构型 $\Omega_t = K_t(B)$ 上的空间描述($\vec{r} \in \Omega_t$).

$$m(P) = \int_P dm = \int_{\Omega_{P,t}} \rho(\vec{r}, t) dV_{\Omega_{P,t}} \quad \forall t, \forall P \in \mathcal{P}(B), \text{ 其中 } \Omega_{P,t} = K_t(P).$$

故可记, “ $dm = \rho dV$ ”
 宏观不变 $\rightarrow$ 选定任一框架下的放置 K_t

△ 由多重积分的度量变换公式,

$$\underbrace{\int_{\Omega_{p,t}} \rho_s dV_{\Omega_{p,t}}}_{\substack{\text{积分域} \\ \text{随时间变化}}} = \int_{\Omega_{p,0}} \rho_s(\vec{r}, t) \left| \vec{r} = \kappa_t \circ \kappa_0^{-1}(\vec{x}) \right| \left| \det \frac{\partial \chi(\vec{x}, t)}{\partial \vec{x}} \right| dV_{\Omega_{p,0}} \\ \underbrace{\hspace{10em}}_{\text{积分域固定.}} \\ = \int_{\Omega_{p,0}} \rho_m(\vec{x}, t) |\det E(\vec{x}, t)| dV_{\Omega_{p,0}},$$

其中 $P \in \mathcal{P}(B)$, $\Omega_{p,t} = \kappa_t(P)$, $\Omega_{p,0} = \kappa_0(P)$, $\vec{x} \in \Omega_{p,0}$, $\chi_t = \kappa_t \circ \kappa_0^{-1}$

公设(质量守恒): 物体任一部分的质量在任一运动过程中守恒, 即

$$\frac{d}{dt} m(P, t) \equiv 0, \quad \forall t, P \in \mathcal{P}(B)$$

Remarks:

△ 由雷诺传输定理, 以及 $m(P, t) = \int_{\Omega_t} \rho(\vec{r}, t) dV_{\Omega_t}$, $\Omega_t = \kappa_t(P)$

$$\frac{d}{dt} m(P, t) \equiv 0 \Leftrightarrow \frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \rho(\vec{r}, t) dV_{\Omega_t} = \int_{\Omega_t} \{ \dot{\rho} + \operatorname{div}(\dot{\rho} \vec{v}) \} = 0,$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\dot{\rho} + \operatorname{div}(\dot{\rho} \vec{v}) = 0} \quad \text{该式称连续性方程 (continuity equation) } \langle \langle \text{化工原理} \rangle \rangle \text{ eq. (1-75), p. 34}$$

△ 连续性方程是一个关于密度场(空间描述)的偏微分方程, 其中需要用到速度场(空间描述)。通过物质描述与空间描述的转换公式, 可以得到其物质描述的形式(留作练习)。

△ 连续性方程在《《化工原理》》中的推导(§1.4.1 p. 33)是雷诺传输定理在质量守恒上的应用。

△ 由关系 $\operatorname{div}(\dot{\rho} \vec{v}) = \frac{\partial \rho}{\partial t} \vec{v} + \rho \operatorname{div} \vec{v}$, 常定义质量流(mass flux)

$$\vec{j} \stackrel{\text{def}}{=} \rho \vec{v}$$

表示单位时间流过与 $\vec{v}$ 垂直的单位截面积的质量, 则连续性方程又表示为

$$\boxed{\dot{\rho} + \operatorname{div} \vec{j} = 0}$$

或将 $\operatorname{div}(\dot{\rho} \vec{v})$ 展开,

$$\dot{\rho} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \vec{v} + \rho \operatorname{div} \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \boxed{\frac{D}{Dt} \rho + \operatorname{div} \vec{v} = 0} \\ \underbrace{\hspace{1.5em}}_{= \frac{D}{Dt} \rho}$$

△ 对于不可压缩流体, $\det E(\vec{x}, t) \equiv 1 \quad \forall t$, 有 $\frac{D}{Dt} \rho \equiv 0$, 故

$$\boxed{\operatorname{div} \vec{v} = 0, \text{ 不可压缩}} \quad \langle \langle \text{化工原理} \rangle \rangle \text{ eq. (1-76) p. 34}$$

定义(物体的动量): 物体 B 在某运动过程中 $\chi_t = \kappa_t \circ \kappa_0^{-1}$ 的线动量(linear momentum)

$$\vec{p}(B, t) = \int_B \frac{\partial}{\partial t} K(X, t) dm = \int_B \vec{v}(X, t) dm$$

关于空间固定一点 $\vec{o}$ 的角动量(angular momentum):

$$\vec{h}_{\vec{o}}(B, t) = \int_B (K(X, t) - \vec{o}) \times \frac{\partial}{\partial t} K(X, t) dm = \int_B (K(X, t) - \vec{o}) \times \vec{v}(X, t) dm$$

若记 $\Omega_t = \kappa_t(X, t)$ 则

$$\vec{p}(B, t) = \int_{\Omega_t} \vec{v}(\vec{r}, t) \rho(\vec{r}, t) dV$$

$$\vec{h}_{\vec{o}}(B, t) = \int_{\Omega_t} [(\vec{r} - \vec{o}) \times \vec{v}(\vec{r}, t)] \rho(\vec{r}, t) dV$$