物体的形变

2021年11月4日 星期四　　上午2:23

定义(物体的形变)：在给定参考系下，设物体B在两时刻 $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$，$t_1<t_2$ 的构型分别为

$\Omega_{t_1} = \kappa_{t_1}(B)$，$\Omega_{t_2} = \kappa_{t_2}(B)$，

则复合映射

$$\chi_{t_1\to t_2}: \Omega_{t_1} \longrightarrow \Omega_{t_2}, \quad \chi_{t_1\to t_2} \overset{def}{=} \kappa_{t_2}\circ\kappa_{t_1}^{-1}$$

称为物体B由 t_1 到 t_2 发生的形变(deformation)

Remarks

△ 我们假定形变映射是可逆的，且通常情况下是任意阶可导(光滑)的。

△ 在讨论物体形变时，我们常选定一个时刻 $t_0\in\mathbb{R}$ 作为参考时刻。在 t_0 时刻物体B的构型 Ω_0 称该物体的参考构型(reference configuration)。任一时刻 $t\in\mathbb{R}$ 下，物体的构型 Ω_t 称为当前构型(current configuration)

△ 我们依照以下记号惯例：

物体B的物质点：$X, Y, \cdots \in B$

参考构型的位置向量：$\vec{X} = \kappa_0(X)$，$\vec{Y} = \kappa_0(Y)$，$\cdots$，$\vec{X}, \vec{Y} \cdots \in \Omega_0$

当前构型的位置向量：$\vec{x}(t) = \kappa_t(X)$，$\vec{y}(t) = \kappa_t(Y)$，$\cdots$；$\vec{x}, \vec{y}, \cdots \in \Omega_t$

△ 固定参考构型的选取下，任一时刻的当前构型可统一表示为由参考构型的形变

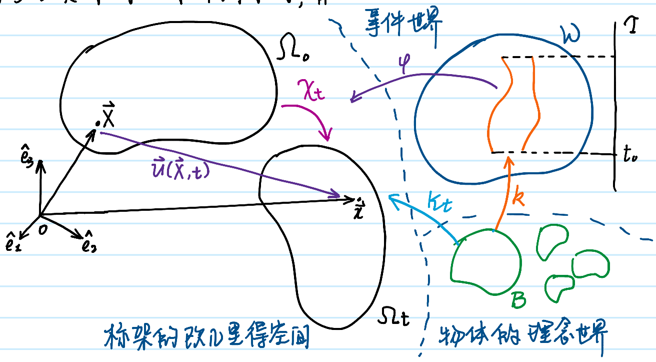
$$\Omega_t = \chi_{t_0\to t}(\Omega_0) \quad \text{简记为} \quad \Omega_t = \chi_t(\Omega_0) = \chi(\Omega_0, t)$$

对 $X, Y\in B$，若 $\vec{X} = \kappa_0(X)$，$\vec{Y} = \kappa_0(Y)$，则 $\vec{X}, \vec{Y} \in \Omega_0$，且 $\vec{x}(t) = \chi(\vec{X}, t)$，$\vec{y}(t) = \chi(\vec{Y}, t)$。
只要已知映射 χ，就已知物体B的一场完整运动。后续的讨论均默认已选取某参考构型。

△ 映射 $\chi(\vec{X}, t)$，$X\in B$ 是一个向量场函数。我们对其分析的方法是求导。对时间求导，有：

$$\begin{aligned}\frac{d\chi(\vec{X},t)}{dt} &= \frac{\partial \chi(\vec{X},t)}{\partial t} && \vec{X}\text{不依赖时间.}\\ &= \frac{\partial\, \kappa_t\circ\kappa_0^{-1}(\vec{X})}{\partial t} && \text{代入映射}\chi\text{的定义}\\ &= \frac{\partial \kappa(X,t)}{\partial t}, && \kappa_0^{-1}(\vec{X}) = X\\ &= \vec{v}(X,t), && \text{速度的定义}\end{aligned}$$

$$\frac{d^2\chi(\vec{X},t)}{dt^2} = \vec{a}(X,t)$$



运动物体B的物质点速度和加速度也可表示为 $\vec{v}(X,t) = \dot{\chi}(\vec{X},t)$ 和 $\vec{a}(X,t) = \ddot{\chi}(\vec{X},t)$。

△ 下面对 $\chi(\vec{X},t)$ 求空间导数

定义(形变梯度张量)：设物体B的运动由形变映射 χ 描述，则物质点 $X\in B$ 在时刻 $t\in\mathbb{R}$ 的形变梯度张量(deformation gradient tensor)是 χ 的如下导数

$$\underline{F}(\vec{X}, t) \overset{def}{=} \frac{\partial \chi(\vec{X},t)}{\partial \vec{X}}\bigg|_{\vec{X}=\kappa_t(X)}, \quad X\in B$$

Remarks：

△ 由于 χ 是可逆的，由反函数定理，若 $\underline{F} = \frac{\partial\chi(\vec{X},t)}{\partial t}$，则 $\underline{F}^{-1} = \frac{\partial \chi^{-1}(\vec{x})}{\partial \vec{x}}\Big|_{\vec{x}=\chi(\vec{X},t)}$

△ 在标准基下，若 $\chi(\vec{X},t) = (x_1, x_2, x_3)^T$，$\vec{X} = (X_1, X_2, X_3)^T$，则 $\underline{F}$ 的坐标矩阵(即映射 χ 的雅可比矩阵

$$(\underline{F}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial X_1} & \frac{\partial x_1}{\partial X_2} & \frac{\partial x_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} & \frac{\partial x_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial X_1} & \frac{\partial x_3}{\partial X_2} & \frac{\partial x_3}{\partial X_3} \end{pmatrix}$$

△ 若 $\underline{F}$ 不依赖 $\vec{X}$，则称这一形变为均匀形变(homogeneous deformation)

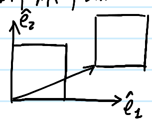
△ 若 $\underset{=}{F}$ 不依赖 $\vec{X}$，则称这一形变为均匀形变 (homogeneous deformation)

△ 物体的位移场：物质点 $X\in B$ 在 t 时刻的位移 $\vec{u}(\vec{X},t)=\chi(\vec{X},t)-\vec{X}$
由向量函数的导数概念，

$$\frac{\partial\vec{u}(\vec{X},t)}{\partial\vec{X}}=\frac{\partial}{\partial\vec{X}}\left(\chi(\vec{X},t)-\vec{X}\right)=\underset{=}{F}-\underset{=}{I}$$

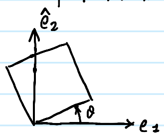
例：二维物体均匀形变．$\vec{X}=(X_1,X_2)^T\in\Omega_0$，$\vec{x}=(x_1,x_2)^T\in\Omega_t$．

1) 刚体平动



映射 χ: $\begin{cases}x_1=X_1+5\\x_2=X_2+2\end{cases}\Rightarrow\underset{=}{F}=\underset{=}{I}$

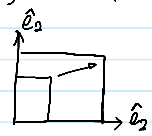
2) 刚体转动：



映射 χ: $\begin{cases}x_1=X_1\cos\theta-X_2\sin\theta\\x_2=X_1\sin\theta+X_2\cos\theta\end{cases}\Rightarrow\underset{=}{F}=\begin{pmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}$

刚体转动的形变梯度张量是正交算符．

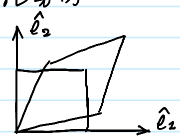
3) 膨胀 (收缩)



映射 χ: $\begin{cases}x_1=2X_1\\x_2=1.5X_2\end{cases}\Rightarrow\underset{=}{F}=\begin{pmatrix}2&0\\0&1.5\end{pmatrix}$

$\underset{=}{F}$ 的对角元素是 $\frac{\partial x_i}{\partial X_i}$，表示 i 相应方向的拉伸比例，值为 1 时无拉伸

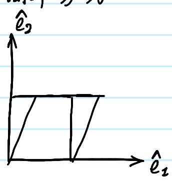
4) 纯剪切



映射 χ: $\begin{cases}x_1=X_1+0.5X_2\\x_2=0.5X_1+X_2\end{cases}\Rightarrow\underset{=}{F}=\begin{pmatrix}1&0.5\\0.5&1\end{pmatrix}$

$\underset{=}{F}$ 的非对角元素 $\frac{\partial x_j}{\partial X_i}$，$i\neq j$，表示剪切，值为 0 时无剪切

5) 简单剪切



映射 χ: $\begin{cases}x_1=X_1+0.5X_2\\x_2=X_2\end{cases}\Rightarrow\underset{=}{F}=\begin{pmatrix}1&0.5\\0&1\end{pmatrix}$

6) 一般形变：

映射 χ: $\begin{cases}x_1=1.3X_1-0.375X_2\\x_2=0.75X_1+0.65X_2\end{cases}\Rightarrow\underset{=}{F}=\begin{pmatrix}1.3&-0.375\\0.75&0.65\end{pmatrix}$

可分解成两步：第一步拉伸：$\begin{cases}x_1'=1.5X_1\\x_2'=0.75X_2\end{cases}\Rightarrow\underset{=}{U}=\begin{pmatrix}1.5&0\\0&0.75\end{pmatrix}$

第二步 刚体旋转：$\begin{cases}x_1=x_1'\cos\frac{\pi}{6}-x_2'\sin\frac{\pi}{6}=1.3X_1-0.375X_2\\x_2=x_1'\sin\frac{\pi}{6}+x_2'\cos\frac{\pi}{6}=0.75X_1+0.65X_2\end{cases}$

$$\Rightarrow\underset{=}{R}=\begin{pmatrix}0.866&-0.5\\-0.5&0.866\end{pmatrix}$$

$\therefore\ \underset{=}{F}=\underset{=}{R}\,\underset{=}{U}$

Remarks

△ 一般地，作为一个正规算符 $\underset{=}{F}$ 可进行极分解 (polar decomposition)

$$\underset{=}{F}=\underset{=}{R}\,\underset{=}{U}=\underset{=}{V}\,\underset{=}{R}$$

其中 $\underline{\underline{R}}$ 是一个正交算符，表示刚体旋转，称为旋转张量（rotation tensor）

$\underline{\underline{U}}$，$\underline{\underline{V}}$ 是正定算符，表示拉伸，分别称为右、左拉伸张量（right / left stretch tensor）

△ 从上面这个例子，我们了解到，物体不发生形变，只发生刚体旋转，也会使 $\underline{\underline{F}} \neq \underline{\underline{I}}$，我们希望构造一种应变的量度，是不考虑平动和刚体旋转的。拉伸张量 $\underline{\underline{U}}$，$\underline{\underline{V}}$ 就是满足这一期望的，但是它们的计算不方便（需要解 $\underline{\underline{F}}$ 的特征多项式求特征值，常通过计算机数值求解）。

△ 定义：

$$\underline{\underline{C}} \overset{def}{=} \underline{\underline{U}}^2$$ 称右柯西格林张量（right Cauchy－Green tensor）

$$\underline{\underline{B}} \overset{def}{=} \underline{\underline{V}}^2$$ 称左柯西格林张量（left Cauchy－Green tensor）

它们统称有限应变张量（finite strain tensor）

$$\underline{\underline{E}} \overset{def}{=} \frac{1}{2}(\underline{\underline{C}} - \underline{\underline{I}})$$ 称格林应变张量（Green's strain tensor）

$$\underline{\underline{e}} \overset{def}{=} \frac{1}{2}(\underline{\underline{I}} - \underline{\underline{B}}^{-1})$$ 称阿尔曼西应变张量（Almansi strain tensor）

易验当 $\underline{\underline{F}} \to \underline{\underline{I}}$ 时

$$\underline{\underline{E}} = \frac{1}{2}(\underline{\underline{C}} - \underline{\underline{I}}) = \frac{1}{2}(\underline{\underline{F}}^*\underline{\underline{F}} - \underline{\underline{I}}) \qquad \text{利用了 } \underline{\underline{U}}^2 = \underline{\underline{F}}^*\underline{\underline{F}}$$

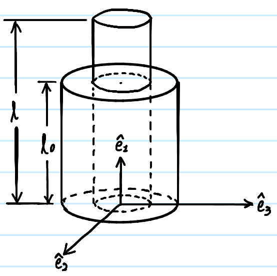
$$= \frac{1}{2}\left[(\underline{\underline{F}}^* - \underline{\underline{I}} + \underline{\underline{I}})(\underline{\underline{F}} - \underline{\underline{I}} + \underline{\underline{I}}) - \underline{\underline{I}}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\underbrace{(\underline{\underline{F}}^* - \underline{\underline{I}})(\underline{\underline{F}} - \underline{\underline{I}})}_{\text{是 } \underline{\underline{F}}-\underline{\underline{I}} \text{ 的高阶无穷小}} + (\underline{\underline{F}}^* - \underline{\underline{I}}) + (\underline{\underline{F}} - \underline{\underline{I}})\right]$$

$$\approx \frac{1}{2}(\underline{\underline{F}}^* + \underline{\underline{F}}) - \underline{\underline{I}}$$

故定义：$\underline{\underline{\varepsilon}} \overset{def}{=} \frac{1}{2}(\underline{\underline{F}}^* + \underline{\underline{F}}) - \underline{\underline{I}}$ 称无限小应变张量（infinitesimal strain tensor）

例：单轴拉伸测试（uniaxial tensile test）：



首先写出该形变的形变映射 χ_t：

$$\vec{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t)) = \chi_t(\vec{X}),\ \vec{X} = (X_1, X_2, X_3)$$

$$\begin{cases} x_1 = \lambda X_1 \\ x_2 = \lambda^{-\frac{1}{2}} X_2, \quad \forall t \\ x_3 = \lambda^{-\frac{1}{2}} X_3 \end{cases}$$

假设不可压缩（incompressible），仿射形变（affine deformation）

$$\underline{\underline{F}}(\vec{X}, t) = \begin{pmatrix} \lambda & & \\ & \lambda^{-\frac{1}{2}} & \\ & & \lambda^{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix},\quad \underline{\underline{B}} = \underline{\underline{C}} = \begin{pmatrix} \lambda^2 & & \\ & \lambda^{-1} & \\ & & \lambda^{-1} \end{pmatrix}$$

可见：$\underline{\underline{F}}$ 不依赖空间位置，故该形变是均匀形变。

我们在材料力学中已经学过以下描述单轴拉伸的物理量：

拉伸比（stretch ratio）：$\lambda(t) = \dfrac{l(t)}{l_0}$

工程应变（engineer strain）：$\varepsilon_{eng}(t) \overset{def}{=} \dfrac{l(t) - l_0}{l_0} = \lambda(t) - 1$

真应变（true strain）：$\varepsilon_{true}(t) \overset{def}{=} \displaystyle\int_{l_0}^{l(t)} \frac{dl'}{l'} = \ln l' \Big|_{l_0}^{l(t)} = \ln l(t)/l_0$

$$= \ln \lambda = \ln(\varepsilon_{eng} + 1) \quad \text{（真应变的积分结果利用了不可压缩假设）}$$