标架不变性：速度与加速度

2021年11月4日 星期四　　上午2:18

△ 物体运动与标架变换：设运动中的物质点 $X\in\mathcal{B}$ 在时刻 $\tau\in\mathcal{T}$ 的位置，在标架 ϕ, ϕ^* 下分别为 $\vec{x}(\tau)$, $\vec{x}^*(\tau)$。设 t, t^* 是 τ 在 ϕ, ϕ^* 下的时标。

1) 时刻的标架变换。由等距变换的表示定理，选定 $\mathbb{R}$ 中某实数 $t_0\in\mathbb{R}$，则有

$$t^*=i(t_0)+(t-t_0)$$

其中 $i:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是时刻的标架变换采用的等距变换，按惯例 $Q=1$。由于一切运动都只发生在一个时间 $\mathcal{T}$ 中，故一个标架变换 (ϕ,ϕ^*) 下的时标需且只需一次等距变换。记 $t^*=i(t_0)$，则

$$t^*=t_0^*+t-t_0=t+a,\quad a=t_0^*-t_0$$

2) 空间位置的标架变换。由等距变换的表示定理，选定空间中某点 $\vec{r}_0\in\mathcal{E}$，则有

$$\vec{x}^*(\tau)=i_\tau(\vec{r}_0)+\mathbf{Q}_\tau(\vec{x}(\tau)-\vec{r}_0)$$

其中 $i_\tau:\mathcal{E}\to\mathcal{E}^*$ 是 τ 时刻标架变换采用的等距变换。一般地，我们假设不同时刻 $\tau_1,\tau_2,\cdots\in\mathcal{T}$ 的等距变换不同 $i_{\tau_1}, i_{\tau_2},\cdots$（相应地 $\mathbf{Q}_{\tau_1}, \mathbf{Q}_{\tau_2},\cdots$），但 $\vec{r}_0$ 的选择是固定的。记 $\vec{r}_0^*(\tau)=i_\tau(\vec{r}_0)$，并按照标架给予相应的时标，则有

$$\boxed{\vec{x}^*(t^*)=\overbrace{\vec{r}_0^*(t^*)}^{\text{参照物的相对平动}}+\overbrace{\mathbf{Q}(t)(\vec{x}(t)-\vec{r}_0)}^{\text{参照物的相对转动}}}$$

若 κ, κ^* 分别是该运动对应的放置映射（放置映射依赖标架），则上式说明

$$\boxed{\kappa^*(\vec{X},t^*)=\vec{r}_0^*(t^*)+\mathbf{Q}(t)(\kappa(\vec{X},t)-\vec{r}_0)}$$

△ 标架变换下的速度与加速度：对于 $X\in\mathcal{B}$

$$\begin{aligned}\vec{v}^*(X,t^*)=\frac{\partial\kappa^*(X,t^*)}{\partial t^*}&=\frac{\partial}{\partial t^*}\vec{r}_0^*(t^*)+\frac{\partial}{\partial t^*}\mathbf{Q}(t)(\kappa(X,t)-\vec{r}_0)+\mathbf{Q}(t)\frac{\partial}{\partial t^*}\kappa(X,t)\\&=\dot{\vec{r}}_0^*(t^*)+\dot{\mathbf{Q}}(t)(\kappa(X,t)-\vec{r}_0)+\mathbf{Q}(t)\vec{v}(X,t)\\&\neq\mathbf{Q}(t)\vec{v}(X,t)\end{aligned}$$

故一般情况下，物体的速度不具有标架变换不变性。除非：

$$\dot{\vec{r}}_0^*(t^*)=0\ \text{且}\ \dot{\mathbf{Q}}(t)=0\quad\forall\ t(\text{或}\ t^*)$$

由 $\kappa^*(X,t^*)=\vec{r}_0^*(t^*)+\mathbf{Q}(t)(\kappa(X,t)-\vec{r}_0)$，$\Leftrightarrow$

$$\begin{aligned}\mathbf{Q}(t)(\kappa(X,t)-\vec{r}_0)&=\kappa^*(X,t^*)-\vec{r}_0^*(t^*)\\\kappa(X,t)-\vec{r}_0&=\mathbf{Q}^{-1}(\kappa^*(X,t^*)-\vec{r}_0^*(t^*))\\&=\mathbf{Q}^T(\kappa^*(X,t^*)-\vec{r}_0^*(t^*))\text{，代入上式}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\boxed{\vec{v}^*(X,t^*)}&=\dot{\vec{r}}_0^*(t^*)+\dot{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}^T(\kappa^*(X,t^*)-\vec{r}_0^*(t^*))+\mathbf{Q}(t)\vec{v}(X,t)\\&=\dot{\vec{r}}_0^*(t^*)+\mathbf{A}(t)(\kappa^*(X,t^*)-\vec{r}_0^*(t^*))+\mathbf{Q}(t)\vec{v}(X,t)\\&\boxed{=\dot{\vec{r}}_0^*(t^*)+\mathbf{A}(t)(\vec{x}^*(t^*)-\vec{r}_0^*(t^*))+\mathbf{Q}(t)\vec{v}(X,t)}\end{aligned}$$

其中 $\mathbf{A}(t)$ 称标架变换 (ϕ,ϕ^*) 的 spin。由

$$\mathbf{A}(t)(\vec{x}^*(t^*)-\vec{r}_0^*(t^*))=\dot{\mathbf{Q}}(t)(\vec{x}(t)-\vec{r}_0)\quad(\vec{x}(t)=\kappa(X,t))$$

$\dot{\mathbf{Q}}(t)\,\cdot\equiv\vec{\omega}(t)\times\,\cdot$ ，标准基下，

$$(\dot{\mathbf{Q}})=\begin{pmatrix}0&\omega_3&\omega_2\\-\omega_3&0&\omega_1\\-\omega_2&-\omega_1&0\end{pmatrix}$$

$\vec{\omega}(t)$ 是目标标架相对于原标架的旋转角速度。

（为什么 $\dot{\mathbf{Q}}$ 能写成此形式需要证明。）

使得：

$$\vec{v}^*(X,t^*)=\dot{\vec{r}}_0^*(t^*)+\vec{\omega}(t)\times(\vec{x}(t)-\vec{r}_0)+\mathbf{Q}(t)\vec{v}(X,t)$$ 这是很多资料中给出的形式

$$\vec{a}^*(X,t)=\frac{\partial^2}{\partial t^{*2}}\kappa^*(X,t^*)=\frac{\partial}{\partial t^*}\vec{v}^*(X,t^*)$$

$$\vec{a}^*(X,t)=\frac{\partial^2}{\partial t^{*2}}\kappa^*(X,t^*)=\frac{\partial}{\partial t^*}\vec{v}^*(X,t^*)$$

$$=\ddot{\vec{r}}_0^*(t^*)+\dot{\underline{\underline{A}}}(t)\left(\vec{x}^*(t^*)-\vec{r}_0^*(t^*)\right)+\underline{\underline{A}}(t)\left(\vec{v}_m(X,t^*)-\dot{\vec{r}}^*(t^*)\right)+\dot{\underline{\underline{Q}}}\,\vec{v}(X,t)+\underline{\underline{Q}}\,\vec{a}(X,t)$$

$$+\underline{\underline{Q}}(t)\,\vec{a}(X,t)$$

故一般情况下物体的加速度不具有标架变换不变性，我们把上式整理一下再说"除非……"

由 $\vec{v}^*(X,t^*)=\dot{\vec{r}}_0^*+\underline{\underline{A}}(t)\left(\vec{x}^*(t^*)-\vec{r}^*(t^*)\right)+\underline{\underline{Q}}(t)\,\vec{v}(t)$

$\Leftrightarrow$

$$\underline{\underline{Q}}(t)\,\vec{v}(X,t)=\vec{v}^*(X,t^*)-\dot{\vec{r}}_0^*(t)-\underline{\underline{A}}(t)\left(\vec{x}^*(t^*)-\vec{r}^*(t^*)\right)$$

$$\Leftrightarrow\quad \vec{v}(X,t)=\underline{\underline{Q}}^T\left(\vec{v}^*(X,t^*)-\dot{\vec{r}}_0^*(t)\right)-\underline{\underline{Q}}^T\underline{\underline{A}}(t)\left(\vec{x}^*(t^*)-\vec{r}^*(t^*)\right)$$

$$\Leftrightarrow\quad \dot{\underline{\underline{Q}}}\,\vec{v}(X,t)=\underline{\underline{A}}(t)\left(\vec{v}^*(X,t^*)-\dot{\vec{r}}_0^*(t)\right)-\underline{\underline{A}}^2(t)\left(\vec{x}^*(t^*)-\vec{r}_0^*(t^*)\right)$$

$$\therefore\ \boxed{\begin{aligned}\vec{a}^*(X,t)=\ &\ddot{\vec{r}}_0^*(t^*)+\dot{\underline{\underline{A}}}(t)\left(\vec{x}^*(t^*)-\vec{r}_0^*(t^*)\right)+2\underline{\underline{A}}(t)\left(\vec{v}^*(X,t^*)-\dot{\vec{r}}_0^*(t)\right)\\&-\underline{\underline{A}}^2(t)\left(\vec{x}^*(t^*)-\vec{r}_0^*(t^*)\right)+\underline{\underline{Q}}(t)\,\vec{a}(X,t)\end{aligned}}$$

其中：$2\underline{\underline{A}}(t)\left(\vec{v}^*(X,t^*)-\dot{\vec{r}}_0^*(t)\right)$ 称为科里奥利加速度

$\dot{\underline{\underline{A}}}\left(\vec{x}^*(t^*)-\vec{r}_0^*(t^*)\right)$ 是目标标架相对原标架旋转的角加速度

$-\underline{\underline{A}}^2(t)\left(\vec{x}^*(t^*)-\vec{r}_0^*(t^*)\right)$ 称离心加速度

它们都依赖 $\vec{r}_0^*(t^*)$，即依赖 $\vec{r}_0$ 的选择。只有当上三项和 $\ddot{\vec{r}}_0^*(t^*)$ 都为零时，（准确地说法是，当 ϕ^* 满足此条件时），物体的加速度才具有标架变换不变性。

△ 两种标架变换：当标架变换 (ϕ,ϕ^*) 满足 $\dot{\vec{r}}_0^*(t^*)=$ 常数且 $\underline{\underline{Q}}(t)=$ 常数 时称为刚体变换。物体的速度在刚体变换下具有不变性。当标架变换 (ϕ,ϕ^*) 满足 $\dot{\vec{r}}_0^*(t^*)=$ 常数，$\underline{\underline{Q}}(t)=$ 常数 时，称为伽利略变换。物体的加速度在伽利略变换下具有不变性。