标架

2021年11月3日 星期三　　下午5:26

定义(世界线)：由时间T到事件世界的一个单射 $l: T\to W$ 满足

$$l(t_1)=l(t_2) \Leftrightarrow t_1=t_2 \quad \forall t_1,t_2\in T$$

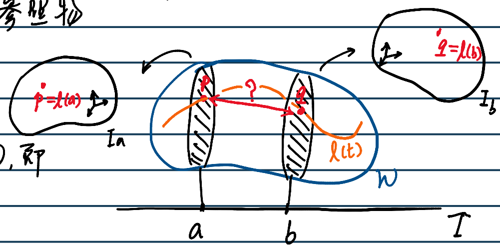
称 l 是一条世界线(world line)

Remarks：

△世界线代表了某个质点的运动轨迹，世界线上的两点必属于不同时刻，也即属于不同的欧几里得空间

△怎样定义属于不同欧氏空间的两点之间的距离？需要借助参照物

定义(标架)：事件世界(W,τ)上的一组"两两平行的"世界线的集合 $\phi=\{l_1,l_2,\cdots\}$ 满足对任意 $t_1,t_2\in T$，$l_1,l_2\in\phi$ 都有 $d(l_1(t_1),l_2(t_1))=d(l_1(t_2),l_2(t_2))$。若$\phi$覆盖了整个$W$，即



$$\bigcup_{l_i\in\phi}\operatorname{ran} l_i = W$$

使得任一事件必属于ϕ的一条世界线，则称ϕ是一个标架(frame)。$l\in\phi$ 称标架ϕ的一条标架线。

Remarks：

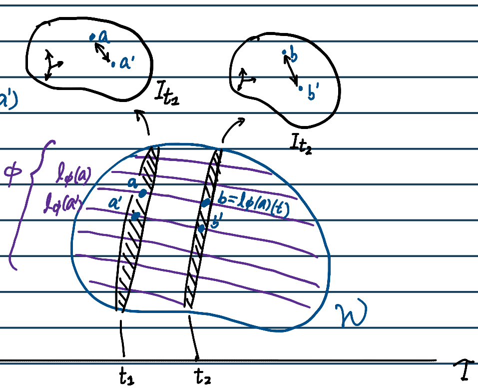
△给定事件世界(W,τ)可存在不止一种标架。

△由于每一事件必属一条标架线，故可定义由W到ϕ的映射 $l_\phi: W\to\phi$ 为将任一$a\in W$对应到其在标架ϕ中所属的标架线的映射。由世界线的单射定义与标架线的平行定义，给定标架ϕ下任一事件a不会同时属于两条标架线，即l_ϕ是单射。

△作为世界线，标架线可将一时刻映射到其线上一点。给定某事$a\in W$，则$l_\phi(a)$可将任一时刻$t\in T$映射到该线上另一事件$b=l_\phi(a)(t)$。

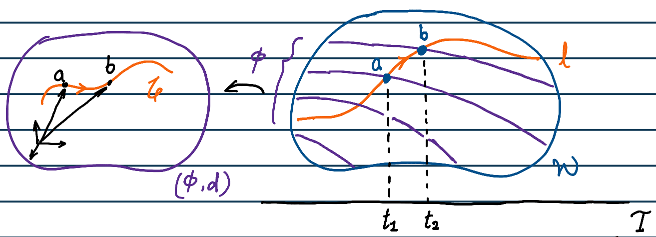
△有了标架，我们就可以从给定时刻t_1的任一事件$a\in I_{t_1}$"顺藤摸瓜"地找到另一时刻t_2上的事件$b\in I_{t_2}$，$b=l_\phi(a)(t_2)$，且这种对应保持距离。

时刻t_1两事件a,a'沿标架线$l_\phi(a),l_\phi(a')$对应至时刻t_2的两点b,b'，则$d(a,a')=d(b,b')$



△我们可直接定义两条标架线$l_1,l_2\in\phi$的距离$d(l_1,l_2)$，并使标架ϕ本身扩展成一个欧几里得空间(ϕ,d)。这个空间也是3维的，它的平移向量空间记为V_ϕ。

△有了标架ϕ的这个欧几里得空间，我们才可以讨论属于不同时刻的两个事件$a\in I_{t_1}$，$b\in I_{t_2}$之间的距离，它们的距离就是其所属两条标架线间的距离，亦即欧几里得空间(ϕ,d)中两点的距离。



△进而一条世界线可在选定标架ϕ下对应成一个欧几里得空间中的曲线$\tilde{l}$，使得我们能够讨论运动轨迹的几何性质。选定V_ϕ的原点$\hat{o}$和规范正交基$\{\hat{e}_i\}$，我们就能把不同时刻t的事件在同一个欧几里得空间中标出其坐标。若在时间集T中也选定了参考时刻$t_0\in T$，则任一时刻t都能唯一对应一个实数$t-t_0$。总之，只要在事件世界(W,τ)中选定标架ϕ和度量d，以及欧几里得空间(ϕ,d)的平移空间V_ϕ的原点$\hat{o}$和规范正交基$\{\hat{e}_i\}$，以及参考时刻$t_0\in T$：

$$\{(\phi,d),\ \hat{o},\ \{\hat{e}_i\},\ t_0\}$$

$\{(\phi, d), \hat{o}, \{\vec{e}_i\}, t_0\}$

则任一事件 $a \in W$ 可对应一组 $\mathbb{R}^{3+1}$ 中的(3+1)元有序实数组 $(r_1, r_2, r_3, t)^T$

定义(参考系)：在事件世界 (W, τ) 选定标架 ϕ，度量 d，V_ϕ 的原点 $\hat{o}$ 和规范正交基 $\{\vec{e}_i\}$ 和参考时刻 $t_0 \in T$ 后的映射：

$$\varphi : W \xrightarrow[(\phi, \hat{o}, \{\vec{e}_i\}, t_0)]{} \mathbb{R}^{3+1}$$

称事件世界 (W, τ) 上的一个参考系(frame of reference).

Remarks：

- △ 在给定参考系下，质点的运动轨迹是关于时间的参数方程 $\vec{r}(t) \in \mathbb{R}^3$，$t \in [t_1, t_2] \subset \mathbb{R}$。位移、速度与加速度还可类似地获得原有的定义。
- △ 注意，质点运动轨迹是依赖标架 ϕ 的选择的(它不仅仅是依赖坐标系 $\hat{o}$，$\{\vec{e}_i\}$ 的选择)。
- △ 可以验证参考系是双射

定义(标架变换)：设事件世界的任一事件 $a \in W$，选定两个参考系 φ，φ^*(包括但不仅限于标架的不同)。$\varphi(a) = (\vec{r}, t)$ $\varphi^*(a) = (\vec{r}^*, t^*)$，$\vec{r}, \vec{r}^* \in \mathbb{R}^3$，$t, t^* \in \mathbb{R}$ 则有

$$(\vec{r}^*, t^*) = \varphi^* \circ \varphi^{-1}(\vec{r}, t)$$

我们称复合映射 $\varphi^* \circ \varphi^{-1}$ 是由 φ 到 φ^* 的标架变换(change of frame)

Remarks：

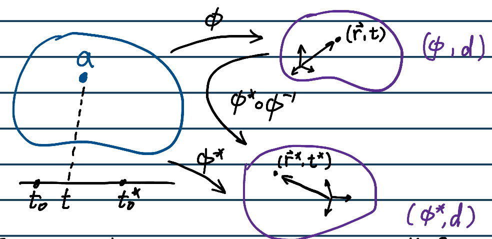
△ 可以验证，标架变换是等距变换。由等距变换的表示定理，标架变换可在时间和空间上分别表示成

$$\begin{cases} \text{时间：} t^* = t_0^* + (t - t_0) \\ \qquad = t + (t_0^* - t_0) \\ \qquad = t + s \\ \text{空间：} \vec{r}^*(t^*) = \vec{r}_0^*(t^*) + \underline{Q}(t)(\vec{r}(t) - \vec{r}_0(t)) \end{cases}$$

$i(t) = i(t_0) + Q(t - t_0)$，$Q = \pm 1$，按惯例 $Q = 1$

$s \equiv t_0^* - t_0$ 是两标架所选参考时刻之间的间隔

其中 $\det \underline{Q} = 1$.



其中 $\vec{r}_0^*(t^*)$，$\vec{r}_0(t)$ 是同一时刻下，选定的某事件在 φ, φ^* 下的映射位置。例如，当我们选择了两个不同的参照物，则 $\vec{r}_0^*(t^*)$ 和 $\vec{r}_0(t)$ 是它们在任一时刻下的位置。

△ 同一事件在不同标架下可进行标架变换(且该变换是双射)体现了物理事件的发生是客观的，又称物理事件具有标架变换下的不变性，简称标架不变性(frame invariant)

△ 物理性质经常以场函数的形式表示，我们希望同一时刻、同一位置的物理量，经不同观察者测定的结果是相同的。这一期望并未必总能满足。但我们先确定如何验证这种性质。

定义(物理性质的标架不变性)：如果在选定两个参考系下，标量 h，向量 $\vec{v}$，线性算符 $\underline{A}$ 满足

$$\begin{cases} h^*(\vec{r}^*, t^*) = h(\vec{r}, t) \\ \vec{v}^*(\vec{r}^*, t^*) = \underline{Q}(t)\, \vec{v}(\vec{r}, t) \\ \underline{A}^*(\vec{r}^*, t^*) = \underline{Q}(t)\, \underline{A}(\vec{r}, t)\, \underline{Q}^T(t) \end{cases}$$

其中 $\underline{Q}(t)$ 是 $\varphi^* \circ \varphi^{-1}$ 在 t 时刻等距变换表示当中的正交算符

则称性质 h，$\vec{v}$，$\underline{A}$ 具有标架不变性。

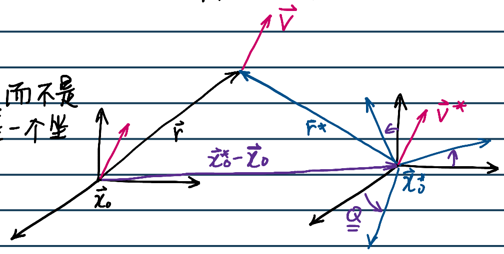
Remarks：

△ 上述定义是按照我们的期望来下的。首先，标量性质的值天然不依赖参照系选取。

对于矢量场，记号 $\vec{v}$，$\vec{v}^*$ 表示的是标架 ϕ，ϕ^* 下的坐标，而不是指抽象向量。同一向量在不同标架下的坐标恰好相差一个坐标变换。如图所示，$\vec{v}$ 的坐标认定不依赖平移 $\vec{r}_0$ 一 $\vec{r}$，故仅需

对于矢量场，记号 $\vec{v}$，$\vec{v}^*$ 表示的是标架 ϕ，ϕ^* 下的坐标，而不是指抽象向量。同一向量在不同标架下的坐标恰好相差一个坐标变换。如图所示，$\vec{v}$ 的坐标认定不依赖平移 $\vec{x}_0^*-\vec{x}_0$，故仅需

$$\vec{v}^*(\vec{x}^*,t^*)=\underline{\underline{Q}}(t)\,\vec{v}(\vec{x},t)$$



对于算符场，记号 $\underline{\underline{A}}$，$\underline{\underline{A}}^*$ 表示的是标架 ϕ，ϕ^* 下的坐标，而不是指算符本身。同一个算符在不同标架下的坐标恰好相差一个坐标变换，即

$$\underline{\underline{A}}^*(\vec{r}^*,t^*)=\underline{\underline{Q}}(t)\,\underline{\underline{A}}(\vec{r},t)\,\underline{\underline{Q}}^{-1}(t)$$

$$=\underline{\underline{Q}}(t)\,\underline{\underline{A}}(\vec{r},t)\,\underline{\underline{Q}}^{T}(t)\quad(\text{利用 }\underline{\underline{Q}}\text{ 是正交算符 }\underline{\underline{Q}}^{-1}=\underline{\underline{Q}}^{T})$$