曲线坐标系3：运动学

2021年11月29日 星期一　　上午3:27

△ 由之前的讨论，我们已经明白，在一个曲线坐标系

$T:\ x_i = x_i(u_1, \cdots, u_n),\ i=1,\cdots,n$

下，向量和算符必须采用该曲线坐标系的基$\{\hat{c}_i\}$下的坐标，运算结果才与直角坐标系下的坐标运算结果相等，维持向量和算符的基底转换不变性。

△ 运动质点位置$\vec{x}(t)$的时间导数 . 若对$\vec{x}(t)$求时间导数，在$\{\hat{e}_i\}$下，

$$\vec{x}(t) = \sum_i x_i(t)\hat{e}_i,\quad \frac{d\vec{x}(t)}{dt} = \sum_i \frac{d}{dt}(x_i(t)\hat{e}_i) = \sum_i \frac{d}{dt}x_i(t)\hat{e}_i,\ (\{\hat{e}_i\}\text{不因}\vec{x}\text{随时间变化而变化。})$$

可简记为，$\vec{x} = \sum_i \dot{x}_i \hat{e}_i$。在$\{\hat{c}_i\}$下

$\vec{x}(t) = \sum_i x_i^c(t)\hat{c}_i(t)$　注意到$\{\hat{c}_i\}$依赖所关注的位置运动而运动。

$$\vec{v} \equiv \frac{d\vec{x}(t)}{dt} = \boxed{\sum_i\left(\frac{dx_i^c(t)}{dt}\hat{c}_i(t) + x_i^c(t)\frac{d\hat{c}_i(t)}{dt}\right)}\ \text{形式I}$$

$$= \sum_i \dot{x}_i^c \hat{c}_i + \sum_i x_i^c \sum_j \dot{S}_{ji}\hat{e}_j$$

$$= \sum_i \dot{x}_i^c \hat{c}_i + \sum_i\sum_j x_i^c \dot{S}_{ji}\sum_k S_{kj}^{inv}\hat{c}_k$$

$$= \sum_k\left(\dot{x}_k^c + \sum_j\sum_i S_{kj}^{inv}\dot{S}_{ji}x_i^c\right)\hat{c}_k$$

$$= \sum_k V_k^c \hat{c}_k$$

$$\Leftrightarrow\quad \boxed{V_k^c = \dot{x}_k^c + \underbrace{\sum_j\sum_i S_{kj}^{inv}\dot{S}_{ji}x_i^c}_{=S^{-1}\dot{S}\begin{pmatrix}x_1^c\\ \vdots\\ x_n^c\end{pmatrix}}}\ \text{形式II}$$

例：绕轴心旋转的圆柱，角速度是ω，形变映射为

$$x:\begin{cases} r = R\\ \theta = \Theta + \omega t\\ z = Z\end{cases}$$　求其速度$\vec{v}$的柱坐标系坐标$(V_r, V_\theta, V_z)^T$

柱坐标系的位置向量：$\vec{x} = (x_r, x_\theta, x_z)^T = (r, 0, z)$

$$S = \begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta & 0\\ \sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\quad S^{-1} = \begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta & 0\\ -\sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},\quad \dot{S} = \omega\begin{pmatrix}-\sin\theta & -\cos\theta & 0\\ \cos\theta & -\sin\theta & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$S^{-1}\dot{S}\begin{pmatrix}x_r\\ x_\theta\\ x_z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}r\\ 0\\ z\end{pmatrix}\omega = \begin{pmatrix}0\\ r\omega\\ 0\end{pmatrix}$$

$\therefore\ V_r = V_z = 0,\ V_\theta = r\omega$

△ 实际上也经常利用形式I，把$d\hat{c}_i/dt$求出即可，常用曲线坐标系的$d\hat{c}_i/dt$可查表。例：球坐标系的基的时间导数：

$$\begin{cases}\dot{\hat{e}}_\rho = \dot{\theta}\hat{e}_\theta + \dot{\varphi}\sin\theta\,\hat{e}_\varphi\\ \dot{\hat{e}}_\theta = -\dot{\theta}\hat{e}_\rho + \dot{\varphi}\cos\theta\,\hat{e}_\varphi\\ \dot{\hat{e}}_\varphi = -\dot{\varphi}\sin\theta\,\hat{e}_\rho - \dot{\varphi}\cos\theta\,\hat{e}_\theta\end{cases}$$

练习，写出推导过程并推出柱坐标的版本。

△ 连续介质力学中，物体B的物质点$X\in B$在参考构型Ω_0中的位置$\vec{X}\in\Omega_0$与当前构型Ω_t中的位

练习，写出推导过程并推出柱坐标的版本。

- 连续介质力学中，物体 B 的物质点 $X\in B$ 在参考构型 Ω_0 中的位置 $\vec{X}\in\Omega_0$ 与当前构型 Ω_t 中的位置 $\vec{x}\in\Omega_t$ 是欧几里得空间 $\mathcal{E}$ 中的不同位置。设在某曲线坐标系下，$\vec{X}$ 处的基 $\{\hat{\mathcal{C}}_i\}$ 和 $\vec{x}$ 处的基 $\{\hat{c}_i\}$ 是不相等的，需要加以区别。具体地，我们有如下两组表达式：

$$\vec{x}=\sum_i x_i^c\hat{c}_i\quad,\quad \hat{c}_i=\sum_j S_{ji}^c\hat{e}_j\quad S_{ji}^c=h_i^{-1}\frac{\partial x_j}{\partial u_i},$$

$$\vec{X}=\sum_i X_i^c\hat{\mathcal{C}}_i,\quad \hat{\mathcal{C}}_i=\sum_j S_{ji}^r\hat{e}_j,\quad S_{ji}^r=H_i^{-1}\frac{\partial X_j}{\partial U_i},$$

其中，$\begin{cases}x_1=x_1(u_1,\cdots,u_n)\\ \vdots\\ x_n=x_n(u_1,\cdots,u_n)\end{cases}$ 和 $\begin{cases}X_1=X_1(U_1,\cdots,U_n)\\ \vdots\\ X_n=X_n(U_1\cdots U_n)\end{cases}$

都是通过映射 T 形成的关系。S 的上标 c 表示当前构型（current configuration）的过渡矩阵，上标 r 表示参考构型（reference configuration）的过渡矩阵。h_i 是当前构型的拉梅系数，H_i 是参考构型的拉梅系数。

- 形变梯度张量 $\underline{\underline{F}}\overset{\text{def}}{=\!=}\frac{d\vec{x}}{d\vec{X}}$，我们有形变的微分式 $d\vec{x}=\underline{\underline{F}}\,d\vec{X}$。在使用曲线坐标系的问题中形变映射常以

$$\chi_t^c:\begin{cases}u_1=u_1(U_1,\cdots,U_n)\\ \vdots\\ u_n=u_n(U_1,\cdots,U_n)\end{cases}$$

的形式给出。这时，形变梯度张量 $\underline{\underline{F}}$ 在曲线坐标 $\{\hat{c}_i\}$ 下的坐标 F_{ij}^c 并不是 $\frac{\partial U_i}{\partial u_j}$，需要推导出形如

$$dx_i^c=\sum_j F_{ij}^c\,dX_j^c\quad,\ i=1,\cdots,n$$

由 $\quad dx_i^c=h_i\,du_i=h_i\sum_j\frac{\partial u_i}{\partial U_j}dU_j=h_i\sum_j\frac{\partial u_i}{\partial U_j}H_j^{-1}dX_j^c$

比较得 $\quad\boxed{F_{ij}^c=\sum_j\frac{h_i}{H_j}\frac{\partial u_i}{\partial U_j}}$

例：柱坐标下

$$\underline{\underline{F}}=\begin{pmatrix}F_{rr}&F_{r\theta}&F_{rz}\\F_{\theta r}&F_{\theta\theta}&F_{\theta z}\\F_{zr}&F_{z\theta}&F_{zz}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\partial r}{\partial R}&\frac{1}{R}\frac{\partial r}{\partial\Theta}&\frac{\partial r}{\partial Z}\\ r\frac{\partial\theta}{\partial R}&\frac{r}{R}\frac{\partial\theta}{\partial\Theta}&r\frac{\partial\theta}{\partial Z}\\ \frac{\partial z}{\partial R}&\frac{1}{R}\frac{\partial z}{\partial\Theta}&\frac{\partial z}{\partial Z}\end{pmatrix}$$