

时空

2021年11月3日 星期三 下午4:30

在经典力学中, 一个发生了的物理事件, 总是具备“空间位置”和“时刻”的属性。

定义(事件世界): 设 W 是一个非空集合, 在 W 上的一个函数 $\tau: W \times W \rightarrow \mathbb{R}$ 满足: $\forall$

- 1) $\tau(a, b) = -\tau(b, a), \forall a, b \in W$
- 2) $\tau(a, b) + \tau(b, c) = \tau(a, c), \forall a, b, c \in W$
- 3) $\forall a \in W, t \in \mathbb{R} \exists b \in W: \tau(a, b) = t$

则称有序对 (W, τ) 是事件世界(event world), W 的元素称事件(event), $\tau(a, b)$ 为事件 a 到事件 b 的时间间隔。

当 $\tau(a, b) \begin{cases} > \\ < \\ = \end{cases} 0$ 时称 $\begin{cases} a \text{ 早于 } b \\ a \text{ 晚于 } b \\ a \text{ 与 } b \text{ 同时} \end{cases}$

我们用事件世界来表示宇宙中所有可以发生的物理事件。我们只讨论一个事件世界

Remarks:

一个事件可理解为“一个质点在某时刻处于欧几里得空间中某处”, 其概念将在后续讨论中逐渐清晰

事件世界 (W, τ) 中, 与给定事件 $a \in W$ 同时发生的事件的集合记为 $I_a = \{b \mid b \in W \text{ 且 } \tau(b, a) = 0\}$

“ a 与 b 同时”是 W 上的一个等价关系, 因为这种关系满足:

自反性: a 与 a 同时, $\forall a \in W$

对称性: 若 a 与 b 同时, 则 b 与 a 同时 $\forall a, b \in W$

传递性: 若 a 与 b 同时, b 与 c 同时则 a 与 c 同时, $\forall a, b, c \in W$

定义(等价类): 设 A 是非空集合, “ $\sim$ ”是定义在 A 上的等价关系, 则与任一元素 $a \in A$ 等价的 A 的元素集合 $I_a = \{b \mid b \in A \text{ 且 } b \sim a\}$ 称 A 的一个等价类(equivalent class)

Remark: 事件世界 (W, τ) 中与给定事件 $a \in W$ 同时的事件集 I_a 就是 W 的一个等价类。

定义(划分): 设 A 是一个非空集合, $C(A)$ 是 A 的一些子集的集合 $C(A) = \{A_1, A_2, \dots\}, A_i \subseteq A, i=1, 2, \dots$ 若

1) $A_i \neq \emptyset \forall A_i \in C(A)$, 这些子集均非空

2) $\forall x \in A \exists A_i \in C(A): x \in A_i$, A 的任一元素必属于这些子集中的一个

3) $\forall A_i, A_j \in C(A), A_i \cap A_j = \emptyset \Leftrightarrow A_i \neq A_j$, $C(A)$ 中的这些子集两两交集均为空集

则称 $C(A)$ 是 A 的一个划分(partition)

定理: 设 A 是一个非空集合, “ $\sim$ ”是定义在 A 上的等价关系, 则 A 的所有等价类 $\{I_a, I_b, \dots\} (a, b, \dots \in W \text{ 且两两不等价})$ 是 A 的一个划分。



一个集合的划分就类似于“分蛋糕”的结果。

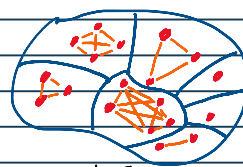
证明: 首先易确认, 所有等价类非空。满足定义1)

如果 $x \in I_a, y \in I_b \neq I_a$, 由等价类定义总有 $x \not\sim y$ 等价, 故 $I_a \cap I_b = \emptyset$, 满足定义2)

对任一 $a \in A$, 至少 $a \in I_a$, 满足定义3) 口。

Remarks:

事件世界 (W, τ) 中的所有同时类是对 W 的划分



集合的元素通过一种等价关系形成的等价类是这一集合的划分。

Remarks:

△ 事件世界 $(W, \mathcal{E})$ 中的所有同时类是对 W 的划分



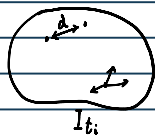
定义(时刻与时间): 从事件世界 $(W, \mathcal{E})$ 的每一同时等价类中选一个代表事件 $t_1, t_2, \dots$ 组成集合 $\mathcal{T}$ 称为时间(time), $t_1, t_2, \dots$ 称为时刻(instant)

Remarks:

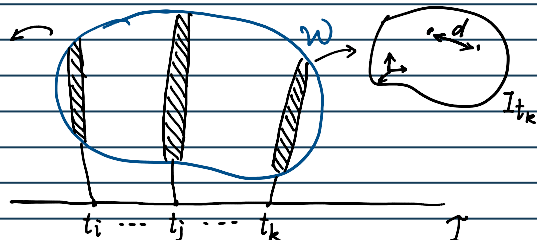
△ 时间和时刻的概念依赖物理事件而建立, 没有物理事件的发生, 就无所谓时刻和时间。

△ 例: 我们常选择“秒针打表盘上某处”这一事件来标志某时刻, 并用其代表与其同时的所有其他事件。

△ 注意到 $(W, \mathcal{E})$ 是一个一维欧几里得空间



△ 我们常记 $b-a \equiv \mathcal{D}(a, b) \in \mathbb{R} \quad \forall a, b \in \mathcal{T}$
则 $a-b = -(b-a), |a-b| = |b-a|$



△ 按定义, 时间的“流逝方向”对应实轴 $\mathbb{R}$ 的正方向。

△ 我们在事件世界 $(W, \mathcal{E})$ 上的每一同时等价类 $I_{a_i}, I_{b_i}, \dots$ 定义相同的度量映射 d , 将它们扩展为共享同一度量的欧几里得空间 $(I_{a_i}, d), (I_{b_i}, d), \dots$ 且规定它们的维数是3。

Remarks:

△ 怎样测量运动中的两点的距离? 需要同时性!

△ 至此, 我们完成了时空的引入, 此种时空构造式称为新经典时空(neo-classical space-time),