应力张量

2021年11月4日 星期四　　上午2:32

△ 我们接着讨论物体的受力。接力的定义规定5)，"其面则其力"。接触力只依赖所讨论的边界。以下则就接触力的密度 —— 牵引场提出类似命题。

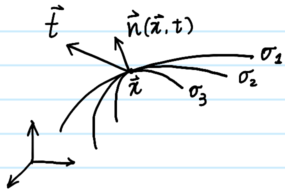
柯西命题："其切面则其牵引力"。设物体B在t时刻构型 $\Omega_t = K_t(B)$，S_1, S_2 是 Ω_t 内的两个曲面，$\vec{x}$ 是它们的一个交点 $\vec{x} \in S_1 \cap S_2$。记作用于 S_1, S_2 上的接触力为

$$\vec{F}_c(S_1) = \int_{S_1} \vec{t}_1(\vec{r},t)\,d\sigma, \quad \vec{F}_c(S_2) = \int_{S_2} \vec{t}_2(\vec{r},t)\,d\sigma$$

其中 $\vec{t}_1(\vec{r},t)$，$\vec{r} \in S_1$，$\vec{t}_2(\vec{r},t)$，$\vec{r} \in S_2$ 分别是曲面 S_1, S_2 上的牵引场。若 S_1 与 S_2 在 $\vec{x}$ 处相切，即 S_1 与 S_2 的单位法向量 $\hat{n}_1(\vec{r},t)$，$\vec{r} \in S_1$，$\hat{n}_2(\vec{r},t)$，$\vec{r} \in S_2$ 有 $\hat{n}_1(\vec{x},t) = \hat{n}_2(\vec{x},t) = \hat{n}(\vec{x},t)$

则

$$\vec{t}_1(\vec{x},t) = \vec{t}_2(\vec{x},t) = \vec{t}(\hat{n}), \quad \hat{n} = \hat{n}(\vec{x},t)$$



Remarks:

△ 柯西在1823年提出了该假说，由W. Noll于1957年严格证明，此略。

△ 由微分的定义，其切于一点的任意两个不同的光滑曲面，在该其切点邻近的差别是到该点距离的高阶无穷小，因此在该点邻近，作为曲面接触力对曲面之积的导数，$\vec{t} = d\vec{F}_c(S)/d\sigma_S$，牵引力强将不依赖过该其切点的具体曲面。—— 这是对柯西命题的思想的一种理解。

柯西引理：在力系平衡下，物体B在任一时刻的构型中，记曲面 $-S$ 为与 S 重合，方向相反的曲面，则 S 的单位法向力为 $\hat{n}(\vec{r},t)$，$\vec{r} \in S$，$-S$ 的单位法向量为 $-\hat{n}(\vec{r},t)$，$\vec{r} \in S$，$\vec{t}(-\hat{n}) = -\vec{t}(\hat{n})$。

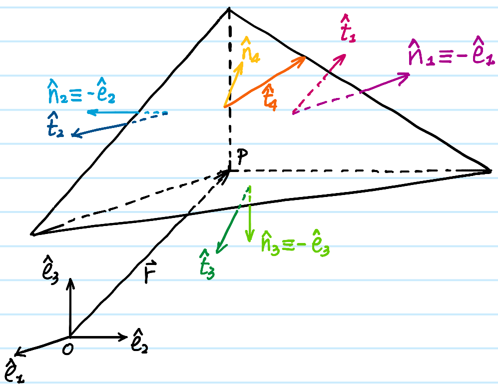
Remarks

△ 柯西引理是作用力与反作用力原理的推论。

柯西基本定理：在惯性系下，牵引向量与其所作用的曲面的单位法向量之间是线性关系。给定任一位置 $\vec{r}$ 处的任一单位法向量 $\hat{n}$ 的曲面元，总存在唯一算符 $\underline{\underline{T}} = \underline{\underline{T}}(\vec{r})$，使得作用于该面元上的牵引力可表示为：

$$\vec{t}(\vec{r},\hat{n}) = \underline{\underline{T}}^{T}(\vec{r})\,\hat{n}, \quad \vec{r} \in \Omega_t$$

$\underline{\underline{T}}$ 称柯西应力张量 (Cauchy stress tensor)。



证明：考虑物体B中的物质点P，某时刻构型中P的位置向量是 $\vec{r}$。

柯西基本定理称，过 $\vec{r}$ 的任意界面上的牵引力 $\vec{t}$ 只与界面在 $\vec{r}$ 处的单位法向量 $\hat{n}(\vec{r})$ 有关，且关系是

$$\vec{t}(\hat{n}) = \underline{\underline{T}}^{T}\,\hat{n}$$

我们在点 $\vec{r}$ 处构建一个小正四面体（如图所示），其中三个面与坐标系平行。第四面为任意斜面，也是我们所关心的面。记与坐标轴 $\hat{e}_i$ 垂直的面为第i个面，面积为 ΔS_i，$i=1,2,3$，第四个斜面面积为 ΔS_4。现在，第4面不过点P，记P到第4面的垂线长度为h（未画出）。则正四面体的体积：$\Delta V = \frac{1}{3}\Delta S_4 h$。

记4个面的单位法向量为 $\hat{n}_1, \hat{n}_2, \hat{n}_3, \hat{n}_4$，则有

$$\hat{n}_1 = -\hat{e}_1, \quad \hat{n}_2 = -\hat{e}_2, \quad \hat{n}_3 = -\hat{e}_3$$
$$\hat{n}_4 = n_{41}\hat{e}_1 + n_{42}\hat{e}_2 + n_{43}\hat{e}_3$$

作用在第i面上的牵引力为 $\vec{t}_i$，$i=1,2,3,4$。我们假设四面体足够小，$\vec{t}_i$ 在第i面上是常向量，故第i面上受的接触力

作用在第i面上的牵引力为 $\vec{t}_i$，$i=1,2,3,4$。我们假设四面体足够小，$\vec{t}_i$ 在第i面上是常向量，故第i面上受的接触力

$$\vec{F}_i = \vec{t}_i \Delta S_i$$

正四面体所受总接触力 $\vec{F}_c = \sum_{i=1}^{4} \vec{t}_i \Delta S_i$.

设正四面体所受体力密度 $\vec{b}$ 在 ΔV 内是常向量（仍然假设正四面体足够小），则其所受体力

$$\vec{F}_b = \rho \vec{b} \, \frac{1}{3} h \Delta S_4$$ 其中 ρ 是物体密度，设在正四面体内为常数。

设该时刻正四面体加速度是 $\vec{a}$（基于同样假设，它是常向量），则动量变化率 $\dot{\vec{p}} = \frac{1}{3}\rho \Delta S_4 h \vec{a}$

由动量守恒， $\vec{F} = \vec{F}_b + \vec{F}_c = \dot{\vec{p}}$

$$\Leftrightarrow \quad \vec{t}_1\Delta S_1 + \vec{t}_2\Delta S_2 + \vec{t}_3\Delta S_3 + \vec{t}_4\Delta S_4 + \frac{1}{3}\rho h \Delta S_4 \vec{b} = \frac{1}{3}\rho h \Delta S_4 \vec{a}$$

利用关系 $\Delta S_i = \Delta S_4 n_{4i}$ $i=1,2,3$，上式

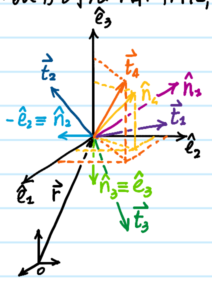
$$\Leftrightarrow \quad (n_{41}\vec{t}_1 + n_{42}\vec{t}_2 + n_{43}\vec{t}_3) S_4 + \vec{t}_4 \Delta S_4 + \frac{1}{3}\rho h \Delta S_4 \vec{b} = \frac{1}{3}\rho h \Delta S_4 \vec{a}$$

令 $h \to 0$，在此极限，第4面是过点P的斜面，上式在此极限下变为：

$$\vec{t}_4 = -n_{41}\vec{t}_1 - n_{42}\vec{t}_2 - n_{43}\vec{t}_3$$

在 $h\to 0$ 极限，$\vec{t}_1, \vec{t}_2, \vec{t}_3$ 变成了作用在第4面上的牵引力，且由上式可知它们为第3 $\vec{t}_4$ 的反作用力，分量大小分别为 n_{41}, n_{42}, n_{43}，方向相反（带上了负号）。上式是一个"合力为零式"。我们只关心，$\vec{t}_4$ 可否分解为三个分向量，系数分别为 n_{41}, n_{42}, n_{43}，分量分别记为 $\vec{t}_1^e, \vec{t}_2^e, \vec{t}_3^e$，即 $\vec{t}_4$ 的"向量分解式" $\vec{t}_4 = n_{41}\vec{t}_1^e + n_{42}\vec{t}_2^e + n_{43}\vec{t}_3^e$ 则有

$\vec{t}_i^e = -\vec{t}_i$，$i=1,2,3$.



我们记 $\vec{t}_i^e = T_{i1}\hat{e}_1 + T_{i2}\hat{e}_2 + T_{i3}\hat{e}_3$，$i=1,2,3$，则后等式写成

T_{ij} 作用力的分量
作用面朝向分量

$$\begin{aligned}
\vec{t}_4 &= n_{41}\vec{t}_1^e + n_{42}\vec{t}_2^e + n_{43}\vec{t}_3^e \\
&= n_{41}(T_{11}\hat{e}_1 + T_{12}\hat{e}_2 + T_{13}\hat{e}_3) + n_{42}(T_{21}\hat{e}_1 + T_{22}\hat{e}_2 + T_{23}\hat{e}_3) \\
&\quad + n_{43}(T_{31}\hat{e}_1 + T_{32}\hat{e}_2 + T_{33}\hat{e}_3) \\
&= (n_{41}T_{11} + n_{42}T_{21} + n_{43}T_{31})\hat{e}_1 + (n_{41}T_{12} + n_{42}T_{22} + n_{43}T_{32})\hat{e}_2 \\
&\quad + (n_{41}T_{13} + n_{42}T_{23} + n_{43}T_{33})\hat{e}_3 \\
&= t_{41}\hat{e}_1 + t_{42}\hat{e}_2 + t_{43}\hat{e}_3
\end{aligned}$$

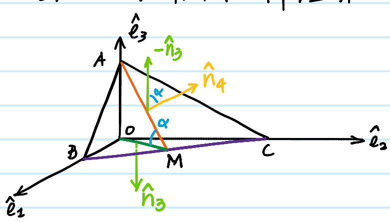
或写成

$$t_{4i} = \sum_j T_{ji} n_{4j} \quad i=1,2,3.$$

或写成 $\begin{pmatrix} t_{41} \\ t_{42} \\ t_{43} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{21} & T_{31} \\ T_{12} & T_{22} & T_{32} \\ T_{13} & T_{23} & T_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_{41} \\ n_{42} \\ n_{43} \end{pmatrix}$， 或写成 $\vec{t}_4 = \underline{T}^T \vec{n}_4$

由于第4面是过位置P处任意斜面，故以上证明了任意点处朝向 $\hat{n}$ 上的牵引向量必可写成 $\vec{t}(\hat{n}) = \underline{T}^T \hat{n}$。$\underline{T}$ 的唯一性由"共法向则共牵引力"自动得证。 □

附：关于 $\Delta S_i = \Delta S_4 n_{4i}$ 的几何证明：



过点O作O到BC的垂线OM，则BC⊥OM

∵ AO⊥面OBC ∴ AO⊥BC

∵ BC⊥AO 且 BC⊥OM ∴ BC⊥面AOM ∴ BC⊥AM

ΔOBC 的面积 $\equiv \Delta S_3 = \frac{1}{2} BC \times OM$

ΔABC 的面积 $\equiv \Delta S_4 = \frac{1}{2} BC \times AM$

$$\therefore \frac{\Delta S_3}{\Delta S_4} = \frac{AM}{OM} = \cos\alpha$$

又∵ $\hat{n}_4 \cdot (-\hat{n}_3) = \cos\alpha = \hat{n}_4 \cdot \hat{e}_3 = n_{43}$ ∴ $\Delta S_3 / \Delta S_4 = \cos\alpha = n_{43}$，$\Delta S_3 = \Delta S_4 n_{43}$ □

Remarks：

△ 柯西的最后命题证明过程存诸多不严谨之处，后续的完善工作：1706.08518.pdf (arxiv.org)

△ 请注意本讲义中柯西应力张量 $\underline{T}$ 的下标惯例。这一惯例使得 $\vec{t}(\vec{r},\hat{n})=\underline{T}^T(\vec{r})\,\hat{n}$，其中 $\underline{T}$ 需要转置。有些书采用同样的惯例，但是写成 $\vec{t}=\underline{T}\cdot\hat{n}$，即一个算符"点乘"一个向量。这一代数运算本讲义未正式介绍，但连续介质力学中可认为 $\underline{A}\cdot\vec{a}\equiv\underline{A}^T\vec{b}$。

△ 在柯西的证明中只用到了线动量守恒。考虑角动量守恒将进一步证明应力张量是对称的，即 $\underline{T}=\underline{T}^T$。有些流体角动量守恒不是处处成立，这时 $\underline{T}$ 不是处处对称。其中一种这类流体称极性流体(polar fluid)，本讲义不涉及。(详见例如 Proc. R. Soc. A 275: 504(1963))

○ 若 $\vec{t}\cdot\vec{n}>0$，则称 $\vec{t}$ 是张力(tension)，反之称 $\vec{t}$ 是压力(pressure)

牵引向量 $\vec{t}(\vec{n})$ 可分为与 $\vec{n}$ 方向相同和正交的分量，即 $\underline{T}$ 的两组坐标：

法向应力：T_{11}，T_{22}，T_{33}

切应力：$T_{23}=T_{32}$，$T_{31}=T_{13}$，$T_{12}=T_{21}$

△ 流体静压(hydrostatic pressure)：$T_{hyd}\overset{def}{=}\dfrac{T_{11}+T_{22}+T_{33}}{3}=\frac{1}{3}\mathrm{tr}(\underline{T})=-p$

$$\underline{T}_{hyd}\overset{def}{=}\begin{pmatrix}-p&&\\&-p&\\&&-p\end{pmatrix}=-p\underline{I}$$

△ 偏应力张量(deviatoric stress tensor)：$\underline{\tau}\overset{def}{=}\underline{T}+\underline{T}_{hyd}$，$\underline{T}=-p\underline{I}+\underline{\tau}$

△ 下面我们考虑应力张量张 $\underline{T}=\underline{T}(\vec{r})$ 在标架变换 ϕ，ϕ^* 下的关系。空间同一处 $\vec{r}$，$\vec{r}^*$ 的同一截面，单位法向量 $\hat{n}$ 与 $\hat{n}^*$，牵引力 $\vec{t}$，$\vec{t}^*$，分别应满足

$$\vec{t}(\vec{r},\hat{n})=\underline{T}(\vec{r})\,\hat{n},\quad \vec{t}^*(\vec{r}^*,\hat{n}^*)=\underline{T}^*(\vec{r}^*)\,\hat{n}^*$$

△ 假设物体B的某部分在标架 ϕ 下，参考构型 $K_0(B)$ 内是一个曲面 ζ，$\vec{G}:R^2\supset U\to R^3$，$\vec{G}(\vec{u})$ 是曲面 ζ 的参数方程。则面元 $d\vec{A}=\frac{\partial\vec{G}}{\partial u_1}\times\frac{\partial\vec{G}}{\partial u_2}$。设由参考构型到当前构型的形变梯度张量为 $\underline{F}$，则当前构型面元 $d\vec{a}=\underline{F}\,\partial\vec{G}/\partial u_1\times\underline{F}\,\partial\vec{G}/\partial u_2$。在标架 ϕ^* 下

$$\begin{aligned}d\vec{a}^*&=\underline{F}^*\,\partial\vec{G}/\partial u_1\times\underline{F}^*\,\partial\vec{G}/\partial u_2\\&=\underline{Q}\underline{F}\,\partial\vec{G}/\partial u_1\times\underline{Q}\underline{F}\,\partial\vec{G}/\partial u_2\qquad(\text{利用 }\underline{Q}\vec{a}\times\underline{Q}\vec{b}=\det\underline{Q}\,\underline{Q}^{-T}\,\vec{a}\times\vec{b}\text{，且参考构型量是常量总客观})\\&=\det\underline{Q}\,\underline{Q}^{T}\,\underline{F}\,\partial\vec{G}/\partial u_1\times\underline{F}\,\partial\vec{G}/\partial u_2\\&=\underline{Q}\,d\vec{a}\end{aligned}$$

故面元形变是客观的。具体地，物体任一曲面在任意形变过程中，法向量是客观的，$\hat{n}^*=\underline{Q}\,\hat{n}$.

△ 由力的公设，力是客观的，故曲面上的接触力也是客观的

$$\vec{F}_c^*=\underline{Q}\,\vec{F}_c$$

$$\int_{\zeta^*}\vec{t}^*(\vec{r}^*)\,da^*=\underline{Q}\int_{\zeta}\vec{t}(\vec{r})\,da\qquad\text{由 }da^*=da,\ \int_{\zeta^*}da^*=\int_{\zeta}da,$$

$\Leftrightarrow$ $\vec{t}^*(\vec{r}^*)=\underline{Q}\,\vec{t}(\vec{r})$，故牵引向量场是客观的

△ 由 $\quad\vec{t}^*=\underline{T}^{*T}\hat{n}^*=\underline{T}^{*T}\underline{Q}\hat{n}=\underline{Q}\vec{t}=\underline{Q}\,\underline{T}^T\hat{n}$

$$\Rightarrow\quad\underline{T}^{*T}\underline{Q}=\underline{Q}\,\underline{T}^T\quad\Leftrightarrow\quad\underline{T}^*=\underline{Q}\,\underline{T}\,\underline{Q}^T$$

故柯西应力张量是客观的。