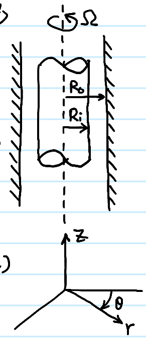
同轴圆筒

Friday, December 11, 2020 1:52 PM

△考虑如图所示的同轴圆柱体与圆柱外壳。圆柱的半径是 R_i，外壳的内径是 R_o。假设在圆柱与外壳之间充满了粘度为 η 的不可压缩牛顿流体。圆柱体以恒定角速度 Ω 绕轴线旋转。外壁保持静止。



建立柱坐标系，空间位置可由 (r,θ,z) 3个数确定。流速 $\vec v$ 的分量是 $\vec v=(v_r,v_\theta,v_z)^T$，其中 v_r,v_θ,v_z 是 $\vec v$ 在柱坐标系下的坐标。虽然 (r,θ,z) 不是空间位置 $\vec r$ 在柱坐标系下的坐标，但我们习惯把 v_r,v_θ,v_z 写成 (r,θ,z) 的函数

$$v_r=v_r(r,\theta,z;t)\quad v_\theta=v_\theta(r,\theta,z;t),\quad v_z=v_z(r,\theta,z;t)$$

类似地应力张量 $\underline{\underline{T}}=\underline{\underline{T}}(r,\theta,z;t)$，在柱坐标系下的坐标

$T_{rr},T_{r\theta},T_{rz},T_{\theta\theta},T_{\theta z},T_{zz}$ 都写成 $(r,\theta,z;t)$ 的函数。

△由质量守恒，不可压缩流体，$\operatorname{div}\vec v=0=\frac{1}{r}\frac{\partial(rv_r)}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta}+\frac{\partial v_z}{\partial z}$ (1)

△柯西运动方程＋牛顿流体本构关系 → Navier-Stokes方程：

$$\rho\frac{\partial\vec v}{\partial t}+\rho\frac{\partial\vec v}{\partial\vec r}\vec v=\rho\vec g-\left(\frac{\partial p}{\partial\vec r}\right)^T+2\mu\operatorname{div}\underline{\underline{D}}\quad(2)$$

其中 $\underline{\underline{D}}=\frac{1}{2}(\underline{\underline{L}}+\underline{\underline{L}}^T)=\frac{1}{2}\left[\frac{\partial\vec v}{\partial\vec r}+\left(\frac{\partial\vec v}{\partial\vec r}\right)^T\right]$，$\vec g=\begin{pmatrix}0\\0\\-g\end{pmatrix}$ 是重力加速度。

在柱坐标下：

$$\frac{\partial\vec v}{\partial\vec r}\vec v=\begin{pmatrix}\frac{\partial v_r}{\partial r} & \frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial\theta}-\frac{v_\theta}{r} & \frac{\partial v_r}{\partial z}\\ \frac{\partial v_\theta}{\partial r} & \frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta}+\frac{v_r}{r} & \frac{\partial v_\theta}{\partial z}\\ \frac{\partial v_z}{\partial r} & \frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial\theta} & \frac{\partial v_z}{\partial z}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_r\\v_\theta\\v_z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}v_r\frac{\partial v_r}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_r}{\partial\theta}-\frac{v_\theta^2}{r}+v_z\frac{\partial v_r}{\partial z}\\ v_r\frac{\partial v_\theta}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta}+\frac{v_\theta v_r}{r}+\frac{v_z}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial z}\\ v_r\frac{\partial v_z}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_z}{\partial\theta}+v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}\end{pmatrix}$$

$$\operatorname{div}\underline{\underline{D}}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv_r)\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2v_r}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2v_r}{\partial z^2}-\frac{2}{r^2}\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta}\\ \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv_\theta)\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2v_\theta}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2v_\theta}{\partial z^2}+\frac{2}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial\theta}\\ \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_z}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2v_z}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2v_z}{\partial z^2}\end{pmatrix}$$

因此，式①和式②可得出关于 p，v_r，v_θ，v_z 的四条偏微分方程。为了简化，先假设定常流，$\frac{\partial\vec v}{\partial t}=\vec 0$，则NS方程为

$$\rho\left(v_r\frac{\partial v_r}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_r}{\partial\theta}-\frac{v_\theta^2}{r}+v_z\frac{\partial v_r}{\partial z}\right)=-\frac{\partial p}{\partial r}+\mu\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv_r)\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2v_r}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2v_r}{\partial z^2}-\frac{2}{r^2}\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta}\right]\quad(2a)$$

$$\rho\left(v_r\frac{\partial v_\theta}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta}-\frac{v_\theta v_r}{r}+\frac{v_z}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial z}\right)=-\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial\theta}+\mu\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv_\theta)\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2v_\theta}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2v_\theta}{\partial z^2}+\frac{2}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial\theta}\right]\quad(2b)$$

$$\rho\left(v_r\frac{\partial v_z}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_z}{\partial\theta}+v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)=-\frac{\partial p}{\partial z}+\mu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_z}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2v_z}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2v_z}{\partial z^2}\right]-\rho g\quad(2c)$$

以上偏微分方程涉及对空间位置的二阶导数，积分后将含两个待定系数，要通过给定边界条件来确定。除此之外，式(1)，(2a)，(2b)和(2c)可确定流体的压力场 $p=p(\vec r)$ 和流速场 $\vec v=\vec v(\vec r)$，但是直接给出这一通解的通解数学过程不是本课传授的重点，详见 J. Happel and H. Brenner (1983), *Low Reynolds Number Hydrodynamics* Martinus Nijhoff Publishers. 以下我们给该问题设置一系列简化。

边界条件：运动学边界条件，在 R_i，R_o 的两个侧面均有 $\vec v\cdot\hat n=0\Leftrightarrow v_r(r=R_i,\theta,z)=v_r(r=R_o,\theta,z)=0$

无滑边界条件：$v_\theta(r=R_i,\theta,z)=\Omega R_i$，$v_\theta(r=R_o,\theta,z)=0$

简化1)：假设圆柱边界在 z 方向无限延伸，流速在 z 方向上分布恒定，即 $\frac{\partial}{\partial z}\equiv0$。

此时，只有式(2c)含 V_z 的偏微分，且为齐次偏微分方程，结合 $V_z(R_i,\theta,z)=V_z(R_o,\theta,z)=0$ 可进一步得到 $V_z(r,\theta,z)\equiv 0\quad \forall r,\theta$

简化2: V_θ 只在 r 方向有不同分布，$\partial V_\theta/\partial\theta\equiv 0$ $\quad V_\theta=V_\theta(r)$，此时式(1)变成关于 V_r 的偏微分方程，且 V_r 也只依赖 r，$V_r=V_r(r)$，故 $\partial p/\partial\theta\equiv 0$

又由式(1)，

$$\frac{\partial(rV_r)}{\partial r}=0 \Rightarrow V_r(r,\theta)+r\frac{\partial V_r(r,\theta)}{\partial r}=0 \Rightarrow V_r(r,\theta)=\frac{1}{r}f(\theta),$$

而 V_r 在 $r=R_i$ 和 $r=R_o$ 时都为零，故 $V_r\equiv 0$

因此我们通过上述简化假设确定了如下结果:

$$V_r\equiv 0,\ V_z\equiv 0,\ \frac{\partial}{\partial\theta}\equiv 0,\ \frac{\partial}{\partial z}\equiv 0$$

留意到，在此假设下，流体保持层流 ($V_r=V_z\equiv 0$)。

在以上简化下，连续性方程变得平凡 ("0=0")，运动方程组:

(2a)→ $\rho\left(-\frac{V_\theta^2}{r}\right)=-\frac{\partial p}{\partial r}$

(2b)→ $0=\mu\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rV_\theta)\right)\right]-\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial\theta}$ $\quad \frac{1}{\mu}\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial\theta}=\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rV_\theta)\right)$ $\quad \frac{1}{\mu}\int\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial\theta}=\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rV_\theta)\right)+C_1$

$\frac{r\,g(\theta)}{\mu}+C_1r=\frac{\partial}{\partial r}(rV_\theta)$ $\quad \frac{C_2}{r}+\frac{1}{2}C_1r^2+\frac{1}{2}r^2\frac{g}{\mu}=rV_\theta$

(2c)→ $0=-\rho g-\frac{\partial p}{\partial z}$

式(2b)中变量 V_θ 与 p 是独立的，视 $\frac{\partial p}{\partial\theta}$ 为常函数，积一次分得

$$\frac{\partial}{\partial r}(rV_\theta)=\frac{r}{\mu}g(\theta)+C_1r \quad 其中\ g(\theta)=\int\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial\theta}dr,\ C_1\ 是积分常数$$

再积一次分:

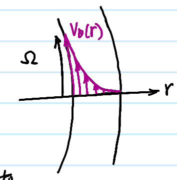
$$V_\theta=\frac{g(\theta)r}{2\mu}+\frac{1}{2}C_1r+\frac{C_2}{r} \quad 其中\ C_2\ 是积分常数$$

由边界条件:

$$\begin{cases}\Omega R_i=\frac{R_i g(\theta)}{2\mu}+\frac{1}{2}C_1R_i+\frac{C_2}{R_i}\\ 0=\frac{R_o g(\theta)}{2\mu}+\frac{1}{2}C_1R_i+\frac{C_2}{R_i}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}C_1=\frac{2\Omega R_i^2}{R_i^2+R_o^2}-\frac{g(\theta)}{\mu}\\ C_2=\frac{R_i^2R_o^2\Omega}{R_o^2-R_i^2}\end{cases}$$

代入 V_θ 得:

$$V_\theta(r)=\frac{R_i^2(R_o^2-r^2)}{(R_o^2-R_i^2)}\frac{\Omega}{r}$$



可见，同轴圆筒中的流场分布并非线性 ($V_\theta(r)\neq kr$)，

V_θ 确定后，(2a)，(2c) 分别给出了压力分布的径向和轴向梯度:

(2a) $\frac{\partial p}{\partial r}=\rho\frac{R_i^4(R_o^2-r^2)^2}{(R_o^2-R_i^2)^2}\frac{\Omega^2}{r}$ 由离心力造成压力梯度

(2c) $\frac{\partial p}{\partial z}=-\rho g$ 由重力造成压力梯度

压力梯度会导致阿基米德效应.

Δ流变测量学中，测粘流的"剪切速率" $\dot{\gamma}\overset{def}{=}\sqrt{\frac{1}{2}|II_D|}$

现

$$\underline{L}=\frac{\partial\vec{v}}{\partial\vec{r}}=\begin{pmatrix}0 & -V_\theta/r & 0\\ \frac{\partial V_\theta}{\partial r} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\qquad \underline{D}=\frac{1}{2}(\underline{L}+\underline{L}^T)=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_\theta}{\partial r}-\frac{V_\theta}{r}\right)\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$=\frac{R_i^2R_o^2\Omega}{(R_i^2-R_o^2)r^2}\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

故 $\dot{\gamma}=\frac{2R_i^2R_o^2\Omega}{(R_o^2-R_i^2)r^2}$

在流变仪上测得的"剪切速率" $\dot{\gamma}=K_\gamma\Omega\Rightarrow K_\gamma=K_\gamma(r)=\frac{R_i^2R_o^2}{(R_i^2-R_o^2)r^2}$,

实际常采用 $K_\gamma=[K_\gamma(R_i)+K_\gamma(R_o)]/2=\frac{R_o^2+R_i^2}{R_o^2-R_i^2}$，故流变仪报告的是平均剪切速率。

Δ流变测量学的"剪切应力": 我们把圆柱当作刚性物体求其边界上的接触力

$$\vec{F}_c=\int_{\partial}\vec{t}_{cyl}(\vec{r})\,dS$$

△ 流变测量学的“剪切应力”：我们把圆柱当作刚性物体求其边界上的接触力

$$\vec{F}_c = \int_A \vec{t}_{cyl}(\vec{r})\, dS$$

其中 $\vec{t}_{cyl}$ 是圆柱表面受到的牵引力。由作用力与反作用力原理，在表面处液体的牵引力 $\vec{t} = -\vec{t}_{cyl}$

故 $\vec{F}_c = -\int_A \vec{t}(\vec{r})\, dS = -\int_A \underline{\underline{T}} \cdot \hat{n}\, dS$，其中液面的法向量 $\hat{n} = (-1, 0, 0)$，

$$\underline{\underline{T}} \cdot \hat{n} = \underline{\underline{T}}^T \hat{n} = -\begin{pmatrix} T_{rr} \\ T_{r\theta} \\ T_{rz} \end{pmatrix} \quad \therefore \vec{F}_c = \int_A \begin{pmatrix} T_{rr}(R_i, \theta, z) \\ T_{r\theta}(R_i, \theta, z) \\ T_{rz}(R_i, \theta, z) \end{pmatrix} dS$$

由牛顿流体本构方程，$\underline{\underline{T}} = -p\underline{\underline{I}} + \underline{\underline{\tau}}$，$\underline{\underline{\tau}} = 2\mu \underline{\underline{D}}$ 得，$T_{rr} = T_{rz} = 0$，$T_{r\theta} = \tau_{r\theta} = 2\mu D_{r\theta}$

上式积分式是要对被积函数在表面 A 上的值积分，表面 A 上 $r \equiv R_i$，故被积函数 $(0, 0, -\tau_{\theta r}(R_i))^T$ 不依赖 r 和 θ。

由这一接触力造成的，绕轴心的力矩

$$\vec{M} = \int_A \left[\begin{pmatrix} R_i \\ \theta \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ \theta \\ z \end{pmatrix}\right] \times \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{r\theta}(R_i) \\ 0 \end{pmatrix} dS = \int_A \begin{pmatrix} R_i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{r\theta}(R_i) \\ 0 \end{pmatrix} dS = \int_A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \tau_{r\theta}(R_i) \end{pmatrix} dS = \begin{pmatrix} M_r \\ M_\theta \\ M_z \end{pmatrix}$$

设圆柱高为 L，则柱坐标下上列面积分得到 $M_r = M_\theta = 0$

$$M_z = \tau_{r\theta}(R_i) \int_0^L dz \int_0^{2\pi} R_i^2\, d\theta = 2\pi L R_i^2 \tau_{r\theta}(R_i) = \underbrace{R_i}_{\text{距离}} \times \underbrace{2\pi L R_i^2}_{\text{面积}} \times \underbrace{\tau_{r\theta}(R_i)}_{\text{牵引力分量}} = \frac{4\pi L \mu R_i^2 R_o^2 \Omega}{R_i^2 - R_o^2}$$

由于 $R_o > R_i$，故 M_z 与 Ω 反号。

流变仪报告的“剪切应力” τ 是施加在液体表面的剪切应力 故 $\tau = -\tau_{r\theta}(R_i) = K_\tau M_z \Rightarrow K_\tau = \frac{1}{2\pi R_i^2 L}$