力与运动定律

2021年11月4日 星期四　　上午2:31

△ 回顾《大学物理》：第一篇的前言（截图如下）以及第二章

第一篇　经典力学

研究机械运动（Mechanical Motion）变化规律的力学（Mechanics）是整个物理学的基础，它的概念、方法和原理深刻地影响和规范了其他物理学分支的建立和发展。以电压和电势能为例，这是将在下册第五篇电磁学中学习的内容，读者一定会注意到，如果没有力学中功和能的概念，人们实际上并不了解生活中这样一些习惯用语的确切意义。

物换星移，寒暑交替，生老病死，宇宙中万事万物都在运动变化。在千姿百态的运动变化形态中，最简单最普遍的是物体位置的变化。物体（或物体内部各部分）相互之间位置的改变就是在力学中要研究的主要运动形式，称为机械运动。

力学包括运动学（Kinematics）、动力学（Dynamics）和静力学（Statics）三个部分。运动学定量描述物体的位置和状态随时间的变化关系，动力学研究和分析物体运动状态改变的原因，静力学则集中考虑物体的平衡问题。

△ 在本讲义中，“力”是作为独立的概念被引入的

定义（力）：1) 给定任意两个分离的物体 P, Q，“Q 向 P 施加的力”记为 $\vec{F}(P,Q)$，是一个向量。若记所有分离的有序部分对的集合为

$$[\mathcal{P}(B)\times\mathcal{P}(B)]_{sep},$$

则 $\vec{F}: [\mathcal{P}(B)\times\mathcal{P}(B)]_{sep} \longrightarrow \mathcal{F}$，$\mathcal{F}$ 是力所属的向量空间。

2) 物体的部分对部分施加的力具有可加性，即

$$\vec{F}(P_1\cup P_2, Q) = \vec{F}(P_1,Q)+\vec{F}(P_2,Q),\quad P_1, P_2, Q \text{ 两两不交}$$

$$\vec{F}(P, Q_1\cup Q_2) = \vec{F}(P,Q_1)+\vec{F}(P,Q_2),\quad P, Q_1, Q_2 \text{ 两两不交.}$$

Remarks

△ 我们把部分 $P\in\mathcal{P}(B)$ 的外部记作 $P^e = B\sim P$。则 $\vec{F}(P,P^e)$ 简记作 $\vec{F}(P)$
由规定2)，$\vec{F}(P_1\cup P_2) = \vec{F}(P_1)+\vec{F}(P_2)$，$\forall P_1, P_2\in\mathcal{P}(B)$，$P_1\cap P_2=\phi$。

△ 若对两分离部分 $P, Q\in\mathcal{P}(B)$，$P\cap Q=\phi$，有 $\vec{F}(P,Q) = -\vec{F}(Q,P)$，则称这一对力系平衡（pairwise equilibrated）。若物体 B 任一部分 $P\in\mathcal{P}(B)$ 都满足 $\vec{F}(P)=\vec{0}$ $\forall P\in\mathcal{P}(B)$，则称物体 B 处于力的平衡（balanced）。可证，处于力的平衡下的物体 B 的任意两个分离部分处于一对力系平衡，即作用力与反作用力定理：

$$\vec{F}(P)=\vec{0}\ \ \forall P\in\mathcal{P}(B) \Rightarrow \vec{F}(P,Q)=-\vec{F}(Q,P)\ \forall P,Q\in\mathcal{P}(B),\ P\cap Q=\phi$$

△ 规定2) 可知，作用于物体 B 任一部分 $P\in\mathcal{P}(B)$ 上的力 $\vec{F}(P)$ 是 P 上的向量值测度
对任意分离两部分 $P, Q\in\mathcal{P}(B)$，$\vec{F}(P,Q)$ 是 P 上的向量值测度。

△ 可以证明（详见 Truesdell (1991) A First Course in Rational Mechanics）以下命题。
故本讲义作为公设规定 4)

定义（力（续））：4）物体B的一个部分 $P\in\mathcal{P}(B)$ 所受的力，是以下两种力之加和：

$$\vec F(P)=\vec F_b(P)+\vec F_c(P)$$

$\vec F_b(P)$ 称作用于P上的体力（body force）；$\vec F_c(P)$ 称作用于P上的接触力（contact force）.

Remarks

△ P受到的体力是其他部分直接作用于P的力，与P的质量 $m(P)$ 有关。

类似质量与质量密度的引入，我们可分别为 $\vec F_b$ 和 $\vec F_c$ 引入相应的密度。在给定放置 κ_t 下，$\vec F_b$ 对 $\mathbb{R}^3$ 上的勒贝格测度绝对连续，存在唯一体力密度场 $\vec b(\vec r,t)$，满足：

$$\vec F_b(P,t)=\int_{\Omega_{p,t}}\vec b(\vec r,t)\,dV_{\Omega_{p,t}}\quad 其中\ \Omega_{p,t}=\kappa_t(P)$$

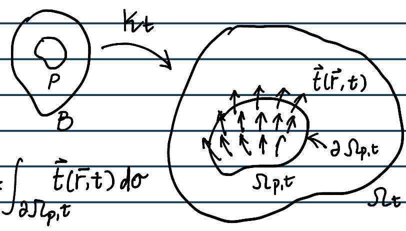
△ 体力密度 $\vec b$ 常源自某保守势，即存在势能 $U(\vec r,t)$ 使得 $\vec b=\left[\frac{\partial U(\vec r,t)}{\partial\vec r}\right]^T=\nabla U(\vec r,t)$ 最常见的例子就是重力。

△ P受到的接触力 $\vec F_c(P)$ 是其他部分在某放置下通过P的边界曲面施加的，与P在此放置下的边界面积有关。$\vec F_c$ 对 $\mathbb{R}^3$ 上的光滑曲面的勒贝格积分（即曲面的面积）绝对连续，存在唯一接触力密度场 $\vec t(\vec r,t)$，满足

$$\vec F_c(P,t)=\int_{\partial\Omega_{p,t}}\vec t(\vec r,t)\,d\sigma_{\partial\Omega_{p,t}}\quad，其中\ \Omega_{p,t}=\kappa_t(P)$$

其中 $\vec t(\vec r,t)$，$\vec r\in\partial\Omega_{p,t}$ 称（放置 κ_t 下）作用于界面 $\partial\Omega_{p,t}$ 上的牵引场（traction field）。

△ $\vec F_b(P)$ 与P的质量直接相关，不随运动变化，但 $\vec F_c(P)$ 只能通过P在某放置下的构型边界，是依赖具体运动的。而且，由于同一边界曲面可以由不同部分共享，作用于不同部分的接触力可以是不同的。然而在连续介质力学中我们规定“共面则共接触力”。

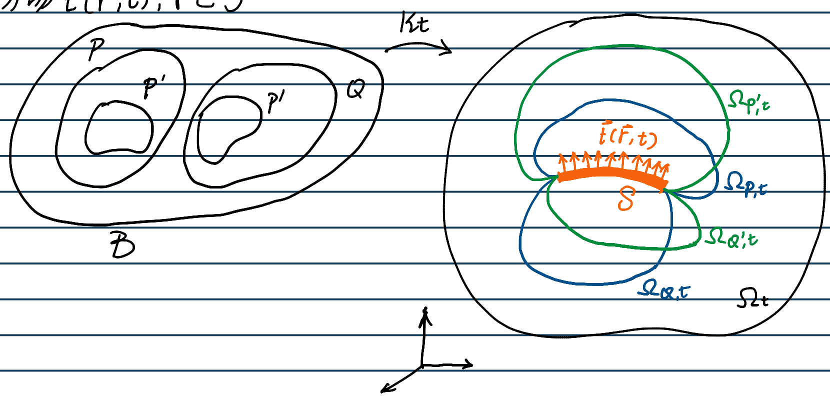


$$\vec F_c(P)=\int_{\partial\Omega_{p,t}}\vec t(\vec r,t)\,d\sigma$$

定义（力（续））：5）设 (P,Q)，(P',Q') 是两对分离的部分，$P'\subset P$，$Q'\subset Q$，(P,Q) 与 (P',Q') 在放置 κ 下的构型，接触面重合，即 $\Omega_P\cap\Omega_Q=\Omega_{P'}\cap\Omega_{Q'}=S\neq\emptyset$，其中S是欧几里得空间的曲面，$\Omega_P=\kappa(P)$，$\Omega_Q=\kappa(Q)$，$\Omega_{P'}=\kappa(P')$，$\Omega_{Q'}=\kappa(Q')$，则

$$\vec F_c(P,Q)=\vec F_c(P',Q')=\vec F_c(S)$$

我们只需要说，物体B在构型 $\Omega_t=\kappa_t(B)$ 中的一个曲面S受的接触力 $\vec F_c(S,t)$ 及其对应的牵引力场 $\vec t(\vec r,t)$，$\vec r\in S$



Remarks：

△ 有了规定5)、6)，规定4)改写成：物体B任一部分 $P\in\mathcal{P}(B)$ 的受力

$$\vec F(P,t)=\int_{\Omega_{p,t}}\vec b(\vec r,t)\,dV_{\Omega_{p,t}}+\int_{\partial\Omega_{p,t}}\vec t(\vec r,t)\,d\sigma_{\Omega_{p,t}}\quad，其中\ \Omega_{p,t}=\kappa_t(P)$$

△设 $P\cap Q=\phi$, $P,Q\in\mathcal{P}(B)$，当 P,Q 处于一对力系平衡时，$\vec{F}(P,Q)=-\vec{F}(Q,P)$。又由规定5)，$\vec{F}(P,Q)=\vec{F_b}(P,Q)+\vec{F_c}(P,Q)$，可以证明，分解的体力与面力各自满足作用力与反作用力定理：

$$\vec{F_b}(P,Q)=-\vec{F_b}(Q,P)\ ,\quad \vec{F_c}(P,Q)=-\vec{F_c}(Q,P)$$

△由于力的绝对连续性规定，体力密度场和牵引力场可分别写成形如导数的形式：

$$\vec{b}(\vec{r},t)=\frac{d\vec{F_b}(K_t(\vec{r}),t)}{dV_{\Omega_{P,t}}}\ ,\ \vec{r}\in\Omega_{P,t}\qquad \text{量纲：力/体积}$$

$$\vec{t}(\vec{r},t)=\frac{d\vec{F_c}(K_t(\vec{r}),t)}{d\sigma_{\partial\Omega_{P,t}}}\ ,\ \vec{r}\in\partial\Omega_{P,t}\quad \text{量纲：力/面积}$$

定义(力(续))：物体受的力不依赖标架选择。设 (ϕ,ϕ^*) 为一对标架变换，并已知其表示为

$$\begin{cases} t^*=t+s \\ \vec{r}^*(t^*)=\vec{r_0}^*(t^*)+\underline{\underline{Q}}(t)(\vec{r}(t)-\vec{r_0}) \end{cases}$$

则 $\vec{F}^*(P,t)=\underline{\underline{Q}}(t)\vec{F}(P,t)$. 相应地，$\vec{b}(\vec{r},t)$ 和 $\vec{t}(\vec{r},t)$ 也具有标架不变性.

欧拉运动定律：

第一定律(惯性定律)：存在标架 ϕ，使得任一物体 B 当且仅当 $\vec{F}(B)=\vec{0}$ 时其质心 $\vec{x}_B$ 作匀速直线运动

第二定律(动量守恒)：在满足惯性定律的标架 ϕ 下，任一物体 B 的运动满足

线动量守恒：$\vec{F}(B)=\dot{\vec{p}}(B)$ (对于无旋流体)角动量守恒：$\vec{M}_0(B)=\dot{\vec{h}}_0(B)$

Remarks：

△由于力被定义为标架不变的，故欧拉运动定律只在惯性系问题中成立。

△我们把体力和接触力的表达式代入动量守恒：

$$\int_{\Omega_t}\vec{b}(\vec{r},t)dV+\int_{\partial\Omega_t}\vec{t}(\vec{r},t)d\sigma=\frac{d}{dt}\int_{\Omega_t}\vec{v}(\vec{r},t)\rho(\vec{r},t)dV\ ,$$

$$\int_{\Omega_t}\vec{r}\times\vec{b}(\vec{r},t)dV+\int_{\partial\Omega_t}\vec{r}\times\vec{t}(\vec{r},t)d\sigma=\frac{d}{dt}\int_{\Omega_t}\vec{r}\times[\rho(\vec{r},t)\vec{v}(\vec{r},t)]dV,\quad \Omega_t=K_t(B)$$

注意积分式中的量均为空间描述。

△我们引入物体的质心：

$$\vec{x}_c(t)=\frac{1}{m}\int_{\Omega_t}\vec{r}\rho(\vec{r},t)dV\ ,\ m\text{是物体}B\text{的质量}$$

及物体的平均速度

$$\dot{\vec{x}}_c(t)=\frac{1}{m}\int_{\Omega_t}\rho(\vec{r},t)\dot{\vec{v}}(\vec{r},t)dV$$

则动量守恒式将 $\vec{F}=m\ddot{\vec{x}}_c$ 的形式，说明连续介质力学是不违反牛顿定律的。