曲线坐标系2：微分关系

2021年11月28日 星期日　　下午9:38

△考虑 $\vec{x}=\sum_i x_i\hat{e}_i$ 关于 $(x_1,\cdots,x_n)^T$ 的微分：

$$
\begin{aligned}
d\vec{x} &= \sum_i \frac{\partial\vec{x}}{\partial x_i}dx_i \\
&= \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}\Big(\sum_j x_j\hat{e}_j\Big)dx_i \\
&= \sum_i\sum_j \frac{\partial x_j}{\partial x_i}dx_i\,\hat{e}_j \\
&= \sum_i\sum_j \delta_{ji}\,dx_i\,\hat{e}_j \\
&= \sum_i dx_i\,\hat{e}_i
\end{aligned}
$$

即 $d\vec{x}$ 在 $\{\hat{e}_i\}$ 下的坐标是 $(dx_1,\cdots,dx_n)$。

△若在某曲线坐标系下，$x_i=x_i(u_1,\cdots,u_n)$，则

$$dx_i=\sum_j\frac{\partial x_i}{\partial u_j}du_j \quad ,i=1,\cdots,n$$

故 $d\vec{x}$ 在 $\{\hat{e}_i\}$ 下的坐标可用 $(u_1,\cdots,u_n)$ 和 $(du_1,\cdots,du_n)$ 表示为

$$d\vec{x}=\sum_i\sum_j\frac{\partial x_j}{\partial u_i}du_i\,\hat{e}_j$$

这也就是 $\vec{x}=\vec{x}(u_1,\cdots,u_n)$ 关于 $(u_1,\cdots,u_n)$ 的微分。

△同理，考虑 $\vec{x}=\sum_i x_i^c\hat{c}_i$，我们希望求出 $d\vec{x}$ 在 $\{\hat{c}_i\}$ 下的坐标 $(dx_1^c,\cdots,dx_n^c)$，即

$$d\vec{x}=\sum_i dx_i^c\,\hat{c}_i$$

其中 dx_i^c 可用 $(u_1,\cdots,u_n)$ 和 $(du_1,\cdots,du_n)$ 来表示。记由 $\{\hat{e}_i\}$ 到 $\{\hat{c}_i\}$ 的过渡矩阵为 S，则

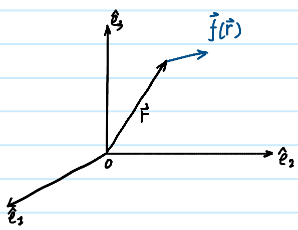
$$d\vec{x}=\sum_i\sum_j\frac{\partial x_j}{\partial u_i}du_i\,\hat{e}_j=\sum_i\sum_j h_i h_i^{-1}\frac{\partial x_j}{\partial u_i}du_i\,\hat{e}_j=\sum_i h_i\,du_i\,\hat{c}_i$$

$$\Rightarrow \boxed{dx_i^c=h_i\,du_i} \quad i=1,\cdots,n$$

△练习：请自行写出球坐标下 $dx_\rho, dx_\theta, dx_\varphi$ 的表达式，柱坐标下 dx_r, dx_θ 的表达式

△设某物理量是向量值场函数，$\vec{f}: V\to V$。这里 V 仍是欧几里得空间 E 的平移向量空间。这里的写法反映了我们的讨论惯例，即向量值物理量总是画成欧几里得空间中的一个向量，且与位置向量投影到同一组基，来获得其分量，因此与位置向量是同一个向量空间的向量。具体地，$\vec{f}$ 在 V 的规范正交基 $\{\hat{e}_i\}$ 下的坐标是 $(f_1,\cdots,f_n)$，或 $\vec{f}=\sum_i f_i\hat{e}_i$，则

$$\vec{f}(\vec{x}):\ \begin{cases} f_1=f_1(x_1,\cdots,x_n) \\ \vdots \\ f_n=f_n(x_1,\cdots,x_n)\end{cases} \quad ,\vec{x}=\sum_i x_i\hat{e}_i$$



在某曲线坐标系，其基为 $\{\hat{c}_i\}$，则 $\vec{f}=\sum_i f_i^c\hat{c}_i$，

$$\vec{f}(\vec{x}):\ \begin{cases} f_1^c=f_1^c(x_1^c,\cdots,x_n^c)=f_1^c(u_1,\cdots,u_n) \\ \vdots \\ f_n^c=f_n^c(x_1^c,\cdots,x_n^c)=f_1^c(u_1,\cdots,u_n)\end{cases} \quad ,\vec{x}=\sum_i x_i^c\hat{c}_i,$$

$\vec{f}$ 的坐标 $f_1,\cdots,f_n$ 与 $f_1^c,\cdots,f_n^c$ 之间的变换公式与位置向量的相同。

△ $\vec{f}$ 的导数，在 $\{\hat{e}_i\}$ 下的雅可比矩阵

$$(\underline{\underline{L}}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{L}} = \frac{d\vec{f}(\vec{x})}{d\vec{x}}$$

按微分的定义，$\underline{\underline{L}}$ 满足 $d\vec{f} = \underline{\underline{L}}\, d\vec{x}$，在 $\{\hat{e}_i\}$ 下，其坐标矩阵表达式为

$$\begin{pmatrix} df_1 \\ \vdots \\ df_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx_1 \\ \vdots \\ dx_n \end{pmatrix} \text{ 或 } df_i = \sum_j \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \hat{e}_j,\ i = 1, \cdots, n$$

在 $\{\hat{c}_i\}$ 下，我们关心形如：

$$\begin{pmatrix} df_1^c \\ \vdots \\ df_n^c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_{11}^c & \cdots & L_{1n}^c \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{n1}^c & \cdots & L_{nn}^c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx_1^c \\ \vdots \\ dx_n^c \end{pmatrix} \text{ 或 } d\vec{f} = \sum_i \sum_j L_{ij}^c\, dx_j^c\, \hat{c}_i$$

的表达式。这理应是 $d\vec{f} = \underline{\underline{L}}\, d\vec{x}$ 在 $\{\hat{c}_i\}$ 下的坐标矩阵表达式。其中 L_{ij}^c 是 $\underline{\underline{L}}$ 在 $\{\hat{c}_i\}$ 下的坐标。
下面我们推导 L_{ij}^c 的表达式，这是关于 $(u_1, \cdots, u_n)$ 的一个表达式。方法是求 $\vec{f}$ 关于 $(u_1, \cdots, u_n)$ 的微分，并化成以 $\{\hat{c}_i\}$ 为基，作用于列向量 $(dx_1^c, \cdots, dx_n^c)^T$ 的形式。

△ $$d\vec{f} = \sum_i \frac{\partial}{\partial u_i} \vec{f}\, du_i = \sum_i \frac{\partial}{\partial u_i}\Big(\sum_j f_j \hat{e}_j\Big) du_i = \sum_i \sum_j \frac{\partial f_j}{\partial u_i} du_i\, \hat{e}_j$$

由 $f_i = \sum_j S_{ij} f_j^c$，$\hat{e}_i = \sum_j S_{ji}^{inv} \hat{c}_j$

$$\begin{aligned}
d\vec{f} &= \sum_i \sum_j \frac{\partial}{\partial u_i}\Big(\sum_k S_{jk} f_k^c\Big) du_i \Big(\sum_l S_{lj}^{inv} \hat{c}_l\Big) \\
&= \sum_{i,j,k}\Big(\frac{\partial S_{jk}}{\partial u_i} f_k^c + S_{jk} \frac{\partial f_k^c}{\partial u_i}\Big)\Big(\sum_l S_{lj}^{inv} \hat{c}_l\Big) du_i \\
&= \sum_{i,j,k,l}\Big(\frac{\partial S_{jk}}{\partial u_i} S_{lj}^{inv} f_k^c \hat{c}_l + \frac{\partial f_k^c}{\partial u_i} \underbrace{S_{jk} S_{lj}^{inv}}_{=\delta_{kl}} \hat{c}_l\Big) du_i \\
&= \underbrace{\sum_{i,j,k,l} \frac{\partial S_{jk}}{\partial u_i} S_{lj}^{inv} f_k^c\, du_i\, \hat{c}_l}_{l \to k,\ k \to l} + \sum_{i,k} \frac{\partial f_k^c}{\partial u_i} \hat{c}_k\, du_i \\
&= \sum_{i,k} \frac{\partial f_k^c}{\partial u_i} \hat{c}_k\, du_i + \sum_{i,j,k,l} \frac{\partial S_{jl}}{\partial u_i} S_{kj}^{inv} f_l^c\, du_i\, \hat{c}_k \\
&= \sum_{i,k} \underbrace{\Big(\frac{\partial f_k^c}{\partial u_i} + \sum_{j,l} \frac{\partial S_{jl}}{\partial u_i} S_{kj}^{inv} f_l^c\Big)}_{k \to j,\ j \to k} \underbrace{du_i\, \hat{c}_k}_{= h_i^{-1} dx_i^c\, \hat{c}_k} \\
&= \sum_{i,j}\Big(h_i^{-1} \frac{\partial f_j^c}{\partial u_i} + h_i^{-1} \sum_{k,l} \frac{\partial S_{kl}}{\partial u_i} S_{jk}^{inv} f_l^c\Big) dx_i^c\, \hat{c}_j = \sum_{i,j} L_{ji}^c\, dx_i^c\, \hat{c}_j
\end{aligned}$$

$i \to j, j \to i$
$$\Rightarrow \boxed{L_{ij}^c = h_j^{-1} \frac{\partial f_i^c}{\partial u_j} + h_j^{-1} \sum_{k,l} \frac{\partial S_{kl}}{\partial u_j} S_{ik}^{inv} f_l^c = h_j^{-1} \frac{\partial f_i^c}{\partial u_j} + \sum_l \Gamma_{lj}^i f_l^c}$$

△ 上式第二项中，记 $\boxed{\Gamma_{lj}^i = h_j^{-1} \sum_k \frac{\partial S_{kl}}{\partial u_j} S_{ik}^{inv}}$ $i, j, l = 1, \cdots, n$ 称克里斯托菲尔符号（Christoffel symbols）简称克氏符号。

第二类克氏符号，与以下文献的规定相同。
Misner, C. W.; Thorne, K. S.; and Wheeler, J. A. Gravitation. San Francisco: W. H. Freeman, 1973.

△ 标量场 $f(\vec{x})$ 的梯度：考虑 $f(\vec{x})$ 关于 $(u_1, \cdots, u_n)$ 的微分

$$\begin{aligned}
df &= \sum_i \frac{\partial}{\partial u_i} f\, du_i \\
&= \sum_i \frac{\partial f}{\partial u_i} h_i^{-1} h_i\, du_i \\
&= \sum_i h_i^{-1} \frac{\partial f}{\partial u_i} dx_i^c
\end{aligned}$$

→ 导数 $df/d\vec{x}$ 在 $\{\hat{c}_i\}$ 下的坐标矩阵是 $1 \times n$ 矩阵 $(h_1^{-1} \frac{\partial f}{\partial u_1}, \cdots, h_n^{-1} \frac{\partial f}{\partial u_n})$

$$= \sum_i h_i^{-1}\frac{\partial f}{\partial u_i}\, dx_i^c$$

$\Rightarrow$ 导数 $df/d\vec{x}$ 在 $\{\hat{e}_i\}$ 下的坐标矩阵是 $1\times n$ 矩阵 $\left(h_1^{-1}\frac{\partial f}{\partial u_1}, \cdots h_n^{-1}\frac{\partial f}{\partial u_n}\right)$

我们将“$\frac{\partial}{\partial \vec{x}}$”在 $\{\hat{e}_i\}$ 下的“坐标”记为 $\left(h_1^{-1}\frac{\partial}{\partial u_1}, \cdots, h_n^{-1}\frac{\partial}{\partial u_n}\right)$，

或者记“$\vec{\nabla}$”在 $\{\hat{e}_i\}$ 下的“坐标”为 $\left(h_1^{-1}\frac{\partial}{\partial u_1}, \cdots, h_n^{-1}\frac{\partial}{\partial u_n}\right)^T$，注意到 $\vec{\nabla}$ 与 $\frac{\partial}{\partial \vec{x}}$ 在 $\{\hat{e}_i\}$ 下的坐标互为矩阵转置。

△ 向量场 $\vec{f}(\vec{x})$ 的散度：$\mathrm{div}\,\vec{f} \overset{\text{def}}{=} \mathrm{tr}\,\underline{\underline{L}} = \vec{\nabla}\cdot\vec{f}$，这是不依赖基的选择的表达式。在 $\{\hat{e}_i\}$ 下，

$$\mathrm{div}\,\vec{f} = \sum_i \left(\frac{\partial f_i^c}{\partial u_i} h_i^{-1} + \sum_{j,k} \Gamma_{kj}^{i} f_k^c\right)$$

△ 算符场的散度：$\vec{\nabla}\cdot\underline{\underline{T}}$ 定义为 $\underbrace{(\vec{\nabla}\cdot\underline{\underline{T}})}_{\text{向量}}\cdot\vec{a} = \vec{\nabla}\cdot\underbrace{(\underline{\underline{T}}\vec{a})}_{\text{向量}}$，在 $\{\hat{e}_i\}$ 下

$$\vec{\nabla}\cdot\underline{\underline{T}} = \sum_j \left\{\sum_i \left[h_i^{-1}\frac{\partial T_{ij}^c}{\partial u_i} + \sum_l \left(\Gamma_{il}^{i} T_{lj}^c + \Gamma_{il}^{j} T_{il}^c\right)\right]\right\}\hat{e}_j$$